Poštarina plaćena u gotovu

HRVATSKO PRIRODOSLOVNO DRUŠTVO
SOCIETAS SCIENTIARUM NATURALIUM CROATICA

GLASNIK

MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

PERIODICUM

MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

SERIJA II.
T. 2 — 1947. — No. 2

Zagreb 1947

Izdaju: Matematičko-fizička sekcija i Astronomska sekcija

SADRŽAJ

Članci, dopisi, pretplate i dr. šalju se na Redakciju Glasnika, Zagreb, Marulićev trg 19, Tel. 40-44, 40-45 ili na Upravu Društva, Ilica 16 III, Tel. 65-85 i naznačiti »Za Glasnik mat.-fizički i astronomski«. — Ček Prirodoslovnog društva: 4-704595.

Vlasništvo i naklada Društva.

Godišnja pretplata iznosi Din 120.—, a može se slati na pošt. čekovni račun broj 40-704214. — Redakcioni odbor: Dr. D. Blanuša, Dr. M. Katalinić, Dr. Đ. Kurepa, Dr. L. Randić, Dr. I. Supek. — Glavni i odgovorni urednik: Dr. Đuro Kurepa. — Štamparija »Rožankovski«, Zagreb, Savska c. 31.

Zlatko Janković

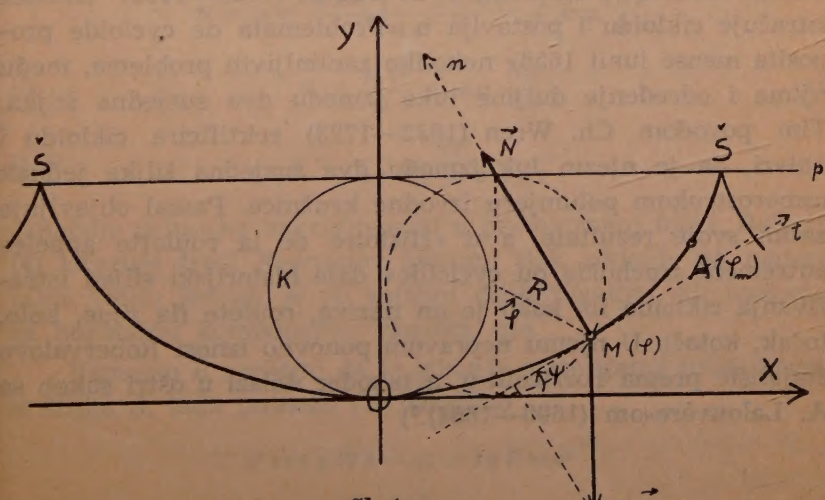
CIKLOIDA - TAUTOHRONA I BRAHISTOHRONA LINIJA

I. UVOD

Uzmemo li koordinatni sustav XOY i krug K, koji se kotrlja po pravcu p (sl. 1), tada, uočivši jednu točku na obodnoj izvodnoj kružnici čvrsto povezanu s krugom K (uzmimo je baš u početnom položaju O), vidimo, da će ona tokom kotrljanja opisivati krivulju, koja je parametarski dana sa:

$$x = R\,(\varphi + \sin\varphi) \qquad y = R\,(1 - \cos\varphi) \tag{1}$$

R je polumjer izvodne kružnice, a φ kut momentanog zakreta. Tu krivulju nazivamo cikloidom (*κύκλος* točak, krug). Os Y nazivamo također i os cikloide, odnosno njezinoga luka između dva susjedna šiljka, a pravac $p \Rightarrow y = 2\,R$, po kojem se kotrlja krug, bazom cikloide. Točka O je tjeme cikloide.



Sl. 1

Cikloida je nosilac vanrednih geometrijskih svojstava. Izgleda, da je bila nepoznata starogrčkim geometrima, bar se u njih izričito ne spominje. J. Wallis (1616—1703) iznosi tvrdnju, da se njome bavio N. Cusanus (1401—1464), no to na temelju jedne, samo njemu poznate, crtnje[1]). Charles de Bouvelles (1470—1553) promatra doduše kotrljanje kotača po putu i krivulju, koju jedna odabrana točka kotača opisuje, no drži tu stazu lukom kružnice, kojoj je središte ispod puta i to za četvrtinu polumjera kotača, koji se kotrlja. Polumjer te kružnice dobivamo spajanjem tako određenog središta i presjecišta horizontalnog promjera kotača s njegovim rubom.[2]) Oko 1590 bavi se cikloidom G. Galilei (1564—1642); drži se, da je nastojao odrediti njezinu površinu ispoređivanjem težine modela površine između 2 susjedna šiljka i baze i težine istovrsnog modela pripadnog izvodnog kruga.[3]). M. Mersenne (1588—1648) podrobnije je ispituje 1615, i navodi 1628 Robervala (Giles Persone de R.) (1602—1675) da je također istražuje. Roberval joj daje ime trohoida (τροχός kolo, kotač) i 1634 dokazuje stavak: površina cikloide između dva susjedna šiljka i baze jednaka je trostrukoj površini izvodnog kruga. R. Descartes (1596—1650) određuje 1638 konstrukcijom tangentu u zadanoj točki cikloide. E. Torricelli (1608—1647) izdaje 1644 djelo »Opera geometrica«; u njemu dokazane stavke o cikloidi Roberval smatra plagijatom.[4]) B. Pascal (1623—1662) također istražuje cikloidu i postavlja u »Problemata de cycloide proposita mense iunii 1658« nekoliko zanimljivih problema, među njima i određenje duljine luka između dva susjedna šiljka. Tim povodom Ch. Wren (1632—1723) rektificira cikloidu i nalazi, da je njezin luk između dva susjedna šiljka jednak osmerostrukom polumjeru izvodne kružnice. Pascal objavljuje zatim svoje rezultate, a u »Histoire de la roulette appelée autrement trochoïde ou cycloïde« daje historijski slijed istraživanja cikloide ili, kako je on naziva, roulete (la roue, kolo, točak, kotač). U njemu nepravom ponovno iznosi Robervalovo stajalište prema Torricelli-u, a također dolazi u oštri sukob sa A. Lalouvère-om (1600—1664).[5])

II. GIBANJE MATERIJALNE TOČKE PO CIKLOIDI

Nakon toga isključivo geometrijskog ispitivanja, imena Chr. Huygensa, G. Leibniza, I. Newtona, Joh. i Jak. Bernoulli-a, L. Eulera i t. d. naznačuju novu periodu — periodu ispitivanja cikloide sa stajališta mehanike. Geometrijska svojstva dala su naslućivati, da ona imade isto tako značajnih mehaničkih svojstava i ta očekivanja nijesu ostala neispunjena.

Promatrajmo gibanje materijalne točke m u polju sile teže po liniji[6]) cikloide. Sila teža neka djeluje u ravnini cikloide prema dolje (sl. 1); tada imamo po Newtonovom drugom aksiomu:

$$m\ddot{x} = -N \sin\psi$$

$$m\ddot{y} = -mg + N\cos\psi \tag{2}$$

$\vec{N}$ označuje spojnu silu (tlak cikloide na materijalnu točku), a ψ je kut pozitivne X osi i tangente. Kako je

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \qquad \sin\psi = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\psi = \frac{dx}{ds}, \tag{3}$$

nalazimo uvrštenjem izraza (3) u (2) da je:

$$N = m\left(\ddot{y}\frac{dx}{ds} - \ddot{x}\frac{dy}{ds}\right) + mg\frac{dx}{ds},$$

što možemo, uz pomoć relacije $v = \frac{ds}{dt}$, pisati

$$N = mv^2\,\frac{dx\,d^2y - d^2x\,dy}{ds^3} + mg\,\frac{dx}{ds}$$

ili

$$N = \frac{mv^2}{\varrho} + mg\frac{dx}{ds} \tag{4}$$

gdje

$$\varrho = \frac{ds^3}{dx\,d^2y - d^2x\,dy}$$

označuje polumjer zakrivljenosti u promatranoj točki. Relacija (4) izrazuje treći Newtonov aksiom: tlak cikloide na materijalnu točku jednak je po veličini centrifugalnoj sili uvećanoj za normalnu komponentu vanjske sile.

Uzmemo li naročito da je gibanje materijalne točke počelo iz šiljka $\check{S}$, tada pomoću (1) nalazimo

$$v^2 = 2g\,(2R - y) = 4gR\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$\varrho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - x''y'} = 4R\cos\frac{\varphi}{2}$$

ili $$m\frac{v^2}{\varrho} = mg\cos\frac{\varphi}{2} = mg\cos\psi,$$

t. j. u tom je slučaju centrifugalna sila jednaka normalnoj komponenti vanjske sile, a cijeli je tlak, prema (4), po veličini jednak dvostrukoj normalnoj komponenti vanjske sile

$$N = 2\,|F_n|\,. \tag{5}$$

Eliminacijom veličine N pomoću (2) i (3) dobivamo jednadžbu gibanja

$$\ddot{x}\,dx + \ddot{y}\,dy + g\,dy = 0,$$

u kojoj još moramo zamijeniti diferencijale koordinata i derivacije po vremenu vrijednostima, koje slijede iz (1). Nakon sređivanja izlazi kao diferencijalna jednadžba gibanja:

$$\ddot{\varphi} - \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\,\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{g}{2R}\,\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = 0. \tag{6}$$

Shvatimo li $\dot{\varphi}$ kao funkciju od φ, a φ kao funkciju od t, to je[7])

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\,[\varphi(t)] \qquad \ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\cdot\dot{\varphi} = \frac{1}{2}\,\frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi}. \tag{7}$$

Zbog (7) poprima jednadžba (6) oblik:

$$\frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi} - \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\,\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R}\,\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = 0. \tag{8}$$

Integral te diferencijalne jednadžbe prvoga reda glasi:

$$\dot{\varphi}^2 = e^{\int\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}d\varphi}\left[C - \frac{g}{R}\int\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\,e^{-\int\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}d\varphi}\,d\varphi\right]$$

ili $$\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{1+\cos\varphi}\left[C + \frac{g}{R}\cos\varphi\right]. \tag{9}$$

Konstantu C odredimo iz početnog uvjeta: u vrijeme $t = 0$ materijalna točka počinje padati iz točke A ($\varphi = \varphi_m$, $\dot{\varphi} = 0$), što nam daje:

$$C = -\frac{g}{R}\cos\varphi_m,$$

a to uvršteno u (9) vodi do ovoga rješenja diferencijalne jednadžbe (8):

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{R}\,\frac{\cos\varphi - \cos\varphi_m}{\cos\varphi + 1}. \tag{10}$$

Promatramo li silaz materijalne točke m od $\varphi = \varphi_m$ do $\varphi = 0$, tada je $\frac{d\varphi}{dt} < 0$, pa iz (10) slijedi:

$$dt = -\sqrt{\frac{R}{g}} \frac{\sin\varphi \, d\varphi}{\sqrt{(1-\cos\varphi)(\cos\varphi - \cos\varphi_m)}},$$

ili supstitucijom:

$$z = \cos\varphi \qquad dz = -\sin\varphi \, d\varphi,$$

$$dt = \sqrt{\frac{R}{g}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z)(z-z_m)}} = \sqrt{\frac{R}{g}} \frac{2}{1-z_m} \frac{dz}{\sqrt{1-\left[\frac{1/2(1+z_m)-z}{1/2(1-z_m)}\right]^2}}. \tag{11}$$

Integracija desne strane izraza (11) u granicama $\varphi = \varphi_m$, $\varphi = 0$ $(z = z_m = \cos\varphi_m,\ z = 1)$ odgovara vremenskoj integraciji lijeve strane od $t = 0$ do $t = T$, gdje T znači pripadno vrijeme silaska. Iz (11) slijedi, dakle, integracijom:

$$T = \sqrt{\frac{R}{g}} \left[\arcsin \frac{1/2(1+z_m)-z}{1/2(1-z_m)}\right]_1^{z_m} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}. \tag{12}$$

Došli smo do vrlo značajnog rezultata — vrijeme silaska neovisno je o početnoj točki A (φ_m), t. j. ma odakle počela materijalna točka silaziti niz liniju cikloide, silazak do tjemena traje jednako dugo. Kako je vrijeme uzlaska na lijevom dijelu linije cikloide, zbog simetričnosti obzirom na os cikloide, također T, vidimo, da će i vrijeme njihaja materijalne točke od $\varphi = \varphi_m$ do $\varphi = -\varphi_m$ i natrag biti neovisno o φ_m, i prema gornjem biti jednako $4\,T$. Navedena svojstva nazivamo t a u t o h r o n o s t (*τὸ αὐτό,* jedno te isto, *χρόνος,* vrijeme) ili i z o h r o n o s t (*ἴσος,* jednak, *χρόνος,* vrijeme), a samu liniju cikloide tautohronom ili izohronom u polju sile teže. J. Lehmann (1800—1863) pokazao je to kvalitativno jednostavnim geometrijskim načinom.[8])

Uzmemo li naročito, da se gibanje počinje u šiljku *Š*, tada je $\varphi_m = \pm\pi$, pa prema (10) izlazi:

$$\dot{\varphi} = \pm\sqrt{\frac{g}{R}} = \text{konst.} \tag{13}$$

U tom slučaju giba se materijalna točka po liniji cikloide tako, da je kutna brzina pripadne izvodne kružnice konstantna, a onda također i translaciona brzina njezinog središta.

G. Galilei ispitujući 1602 svojstva kružnog njihala, drži, da je eksperimentalno pokazao jednako trajanje njihaja velike i male amplitude, no uzalud traži teoretski dokaz.[9]) Također dolazi na pomisao mjerenja vremena pomoću broja njihaja njihala, koje bi zbog pretpostavljene izohronosti njihaja bilo pouzdan aparat. Pritom bi njihalo velike mase pokretalo mehanizam koji bi brojio njihaje.[10]) Chr. Huygens (1629—1695) prvi je zamislio 1657, da upotrijebi njihalo kao regulator mehanizma, koji se pokreće vlastitom snagom. Tom mehanizmu njihalo bi trebalo omogućiti jednoliko kretanje.[11]) Tako sagrađenu uru opisao je u manjem djelu »Horologium« (1658) i nastojao ju je dalje usavršiti. Spoznavši ovisnost trajanja njihaja kružnog njihala o amplitudi, nailazi kod ispitivanja cikloide na njeno značajno svojstvo tautohronosti (odnosno izohronosti) u polju sile teže, pa ga nastoji praktički upotrijebiti kod konstrukcije ure njihalice. Ostvarenje cikloidnog njihala uspjelo je Huygensu primjenom stavka: evolventa, odnosno evoluta cikloide je također cikloida. Prva ura njihalica, kod koje je primjenjeno cikloidno njihalo, Huygensovo je djelo. Njezin opis i dokaz prije spomenutih stavaka nalazimo u znamenitom djelu »Horologium oscillatorium« (1673).[12]) Međutim praktična primjena kao da nije donijela očekivanih rezultata, pa joj već L. Euler (1707—1783) poriče vrijednost.[13]) Zanimljivo je spomenuti jednu noviju izvedbu takve ure, koju je po W. Kecku [14]) sagradio profesor Stampfer za neku crkvu u Lavovu. I. G. Pardies (1636—1673) dokazao je također stavak o tautohronosti ili izohronosti, kako ga je on nazvao, za cikloidu nekako u vrijeme izlaženja djela »Horologium oscillatorium«.[15])

III. CIKLOIDA KAO TAUTOHRONA LINIJA

Promatranjem gibanja materijalne točke pod utjecajem sile teže po liniji cikloide, a bez otpora i trenja, upoznali smo se s jednom vrlo značajnom osobinom toga gibanja — sa tautohronosti ili izohronosti, obzirom na tjeme cikloide. Ali problem tautohrone (izohrone) linije u polju sile teže nije riješen time, da smo pokazali da je gibanje po liniji cikloide u tom polju tautohrono (izohrono), jer smo do tog rezultata došli slučajno, kao što i sam Huygens napominje.[16]) Pokušat ćemo ga riješiti primjenom rješenja dvaju osnovnih općenitih problema:

1. poznatoj sili odrediti tautohrone (izohrone) linije,

2. poznatoj liniji odrediti sile, za koje je ona tautohrona (izohrona) linija.

a) Sila ovisi samo o položaju materijalne točke

Ovako postavljenim problemom tautohrone prvi se je zabavio I. Newton (1643—1727)[17], a općenitu metodu za njegovo rješenje dao je L. Euler.[18] A. V. Puiseux (1820—1883), oslonivši se na Eulera, dao je teoriji jednostavniji oblik.[19]

Rezultat toga istraživanja možemo ovako izložiti:

1. Elastičnoj sili odgovara samo pravac kao tautohrona (izohrona) linija,

2. pravac je tautohrona (izohrona) linija samo za elastičnu silu, t. j. samo diferencijalna jednadžba:

$$m\ddot{x} = -k^2 x \tag{14}$$

opisuje tautohrono (izohrono) gibanje.

Budući da je za vremenski karakter gibanja po ma kojoj liniji odlučna tangencijalna komponenta sile, potrebno je promatrati diferencijalnu jednadžbu:

$$m\ddot{s} = S, \tag{15}$$

gdje S znači tangencijalnu komponentu sile koja djeluje. Analogno prema (14) mora postojati za tautohrono (izohrono) gibanje:

$$S = -k^2 s, \tag{16}$$

ili tautohrono (izohrono) gibanje opisuje samo diferencijalna jednadžba:

$$m\ddot{s} = -k^2 s. \tag{17}$$

Iz rješenja njenoga:

$$s = s_0 \sin\left(\frac{k}{\sqrt{m}}\, t + \alpha\right) \tag{18}$$

vidimo da je vrijeme silaska T neovisno o početnoj točki s_0 i da je

$$T = \frac{\pi}{2}\,\frac{\sqrt{m}}{k}. \tag{19}$$

Uvrstimo li odavle izračunani k u diferencijalnu jednadžbu (17), dobivamo:

$$\ddot{s} = -\frac{\pi^2}{4T^2}\cdot s. \tag{20}$$

Jednadžba (20) opisuje tautohrono gibanje s vremenom silaska T.

Sada možemo odgovoriti na prije postavljena pitanja 1, 2 uzevši u razmatranje polje sile teže i liniju cikloide.

1. Koje su tautohrone linije za polje sile teže ($\vec{g} =$ konst)?

α) Prema (15) i (20) postoji za tangencijalnu komponentu u ovom slučaju:

$$S = -mg \sin \psi = -m \frac{\pi^2}{4T^2} \cdot s, \tag{21}$$

gdje je ψ kut između X osi i tangente. Uzmemo li u obzir (3), izlazi iz (21), da tražena linija zadovoljava diferencijalnu jednadžbu:

$$g \frac{dy}{ds} = \frac{\pi^2}{4T^2} \cdot s \tag{22}$$

ili da je

$$dy = \frac{\pi^2}{4T^2 g} s \cdot ds. \tag{23}$$

Integracijom izraza (23) dobivamo za traženu tautohronu liniju jednadžbu:

$$y = \frac{\pi^2}{8T^2 g} s^2, \tag{24}$$

ako uzmemo, da je za $s = 0$ i $y = 0$.

Uvrsti li se s iz (21) u (24), izlazi:

$$y = \frac{gT^2}{\pi^2} (1 - \cos 2\psi). \tag{25}$$

Kako iz (3) i (25) slijedi:

$$dx = \frac{4gT^2}{\pi^2} \cos^2 \psi \, d\psi = \frac{2gT^2}{\pi^2} (1 + \cos 2\psi) \, d\psi,$$

integral je tog izraza:

$$x = \frac{gT^2}{\pi^2} (2\psi + \sin 2\psi), \tag{26}$$

ako uzmemo kao točku tautohronosti upravo ishodište O ($s = 0$, $\psi = 0$, daje $x = 0$, $y = 0$). Prema tomu tautohrona u polju sile teže samo je linija cikloide, jer ako označimo

$$\frac{gT^2}{\pi^2} = R, \qquad 2\psi = \varphi$$

vidimo, da izrazi (25) i (26) prikazuju parametarski upravo cikloidu (1).

β) J. M. Duhamel (1797—1872)[20] dao je također jedno zanimljivo rješenje. Iz principa energije slijedi:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g(y_0 - y),$$

(y_0 visina početne točke), a iz toga dobivamo vrijeme silaska:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{y_0 - y}}. \tag{27}$$

Promatramo li takve linije, kojima možemo luk izraziti redom potencija po y, t. j. s prikazati u obliku:

$$s = A y^{\alpha} + B y^{\beta} + \dots, \tag{28}$$

prelazi (27) u:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left[A\alpha \int_0^{y_0} \frac{y^{\alpha-1}\, dy}{\sqrt{y_0 - y}} + \dots \right],$$

ili sa supstitucijom $y = y_0 z$:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left[A\alpha {y_0}^{\alpha - 1/2} \int_0^1 \frac{z^{\alpha-1}\, dz}{\sqrt{1-z}} + \dots \right].$$

Da T bude neovisno o y_0, moraju iščeznuti svi članovi osim onoga, kome je eksponent od y_0 nula. Uzmimo da je to baš prvi ($A \neq 0$, $\alpha = 1/2$), a svi dalji $B = C = \dots = 0$, tada preostaje od cijeloga razvoja (28):

$$s = A\sqrt{y}, \tag{29}$$

a to je prema (24) karakteristična jednadžba cikloide.

2. Za koje je sile linija cikloide tautohrona linija?

Obzirom na parametarske jednadžbe (1) je:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2R\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi, \quad \text{a} \quad s = 4R\sin\frac{\varphi}{2}, \tag{30}$$

ako luk računamo od $\varphi = 0$, $s = 0$. Prema jednadžbama (15) i (20) mora postojati među tangencijalnom komponentom sile i lukom cikloide zbog (30) relacija:

$$S = -m\frac{\pi^2}{T^2} R\sin\frac{\varphi}{2}. \tag{31}$$

Poznata je osobina cikloide, da tangenta u točki, kojoj odgovara vrijednost parametra φ, zatvara kut $\psi = \dfrac{\varphi}{2}$ s pozitivnom osi X, pa iz (31) vidimo, da je S tangencijalna komponenta konstantne sile $\vec{F}$, koja djeluje u negativnom smjeru osi Y, a iznos joj je:

$$F = m\frac{\pi^2}{T^2} R. \tag{32}$$

Taj iznos neovisan je o φ, odnosno o x, y; on je konstantan za cikloidu polumjera izvodne kružnice R i vremena tautohronosti T. Ubrzanje, što ga ta sila daje slobodnoj materijalnoj točki je konstantno i iznosi prema (32):

$$g = \frac{\pi^2}{T^2} R. \tag{33}$$

Prema tomu, budući da je i sila teža konstantna za malene promjene visina, bit će cikloida tautohrona linija i za silu teže, ako ova djeluje u suprotnom smjeru od osi cikloide.

Tako smo upoznali liniju cikloide među dva susjedna šiljka kao jedinu tautohronu liniju u polju sile teže. Zbog simetričnosti obzirom na os, bit će ona ujedno i izohrona linija.

Dopustimo li da se tautohrona (izohrona) linija sastoji od dvije ili više linija, odnosi se znatno zamršuju. Pitanje takve izohrone linije u polju sile teže, a opet za gibanje bez otpora i trenja, dodirnut ćemo samo i potražiti osnovni uvjet kojem mora njezin luk zadovoljavati. Sastavimo li u najnižoj točki linije L_1 i L_2 (s vremenima silaska T_1 i T_2 iz y_0) u jednu liniju L i postavimo li zahtjev da L bude izohrona, znači da

$$T = T_1 + T_2$$

mora biti neovisno o početnoj točki, t. j. o y_0. Prema relaciji (27), ako je primjenimo na $L_1 + L_2$, imamo:

$$T = \int_0^{y_0} \frac{d s_1 + d s_2}{\sqrt{2 g (y_0 - y)}} .$$

Analognim zaključivanjem kao Duhamel dobili bismo:

$$s_1(y) + s_2(y) = A \sqrt{y} \tag{34}$$

kao uvjet izohronosti linije L u polju sile teže. Ukupni luk mora ovisiti o koordinati y kao luk cikloide. Odavde je jasno, da uzmemo li za jednu liniju upravo cikloidu:

$$s_1 = B \sqrt{y}, \tag{35}$$

onda i druga linija mora biti cikloida, jer iz (35) i (34) slijedi:

$$s_2 = (A - B) \sqrt{y}$$

t. j. tautohronost jedne strane povlači za sobom tautohronost i druge. Ali uzmemo li jednu liniju po volji (L_1) tada nam relacija (34) daje mogućnost da odredimo drugu liniju, koja zajedno s prvom čini izohronu liniju L.

b) Sila ovisi o položaju i brzini materijalne točke

Polazeći od vremena silaska

$$T = \int_0^{s_0} \frac{ds}{v} \tag{36}$$

i uz zahtjev njegove neovisnosti o početnoj točki

$$\frac{dT}{ds_0} = 0 \tag{37}$$

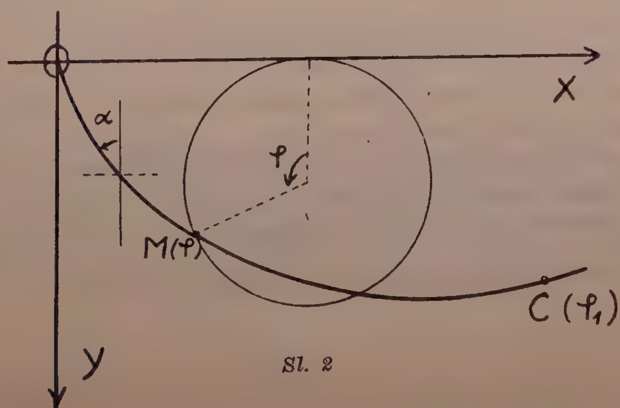
uspjelo je J. L. Lagrange-u (1736—1813) i još općenitije C. Brioschi-u (1782—1833) postaviti uvjet, koji mora zadovoljavati tangencijalna komponenta sile, da gibanje bude tautohrono na nekoj liniji. Primijenivši taj uvjet na polje sile teže, pojavljuje se linija cikloide kao tautohrona u ova četiri slučaja gibanja materijalne točke:

1. bez trenja i bez otpora (slučaj a),
2. uz trenje, a bez otpora,
3. bez trenja, a uz otpor proporcijalan brzini, i općenito
4. uz trenje i uz otpor proporcionalan brzini.[21]

Već je I. Newton dokazao da je linija cikloide tautohrona u slučaju 3., a također i onda ako je otpor konstantan.[22] L. Euleru je uspjelo naći tautohrone i u drugim slučajevima, kao na pr. za otpor proporcionalan s kvadratom brzine.[23]

IV. CIKLOIDA KAO BRAHISTOHRONA LINIJA

Gibanje materijalne točke po liniji cikloide u polju sile teže ima osim svojstva tautohronosti još jedno — svojstvo brahistohronosti (*βραχύς*, kratak, *χρόνος*, vrijeme). Pustimo li padati točku pod utjecajem sile teže, koja djeluje u smjeru osi Y (sl. 2), tada je vrijeme padanja od točke *O* (mirovanje)



Sl. 2

do neke točke C (x_1, y_1) po liniji cikloide kraće od vremena padanja po luku ma koje druge linije, koja prolazi točkama O i C. Pokazat ćemo to ovako: iz

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2gy} \tag{38}$$

slijedi
$$t = \int_O^C dt = \int_O^C \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \int_O^C \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\, dx. \tag{39}$$

Budući da tražimo onu liniju t. j. onu funkciju y od x, koja zadani integral u čvrstim granicama čini minimalnim, pa prema (39) i vrijeme padanja minimalnim, moramo primijeniti račun varijacija, da postignemo traženi rezultat. Kao što je poznato[24]) nužni uvjet za to je:

$$\delta t = \delta \int_O^C dt = \delta \int_O^C \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \delta \int_O^C \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\, dx = 0. \tag{40}$$

Traženu funkciju moramo dakle odrediti kao rješenje pripadne Eulerove diferencijalne jednadžbe:

$$\frac{d}{dx}(f_{y'}) - f_y = 0, \qquad \text{gdje je} \qquad f(x, y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}. \tag{41}$$

Sređena ta jednadžba prima oblik:

$$\frac{2y'y''}{1+y'^2} + \frac{y'}{y} = 0. \tag{42}$$

Njezin prvi integral glasi:

$$y'^2 = \frac{c^2 - y}{y} \tag{43}$$

a to uz supstituciju:

$$y = c^2 \sin^2 \psi = \frac{c^2}{2}(1 - \cos 2\psi) \tag{44}$$

daje
$$dx = 2c^2 \sin^2 \psi\, d\psi = c^2 \cdot (1 - \cos 2\psi)\, d\psi,$$

dakle:
$$x = \frac{c^2}{2}(2\psi - \sin 2\psi) + x_0. \tag{45}$$

Za $y = 0$ je i $\psi = 0$, a da i x bude istodobno nula (linija prolazi ishodištem O sl. 2), mora x_0 biti nula. Uvede li se još $2\psi = \varphi$, rješenja (45) i (44) prelazi u:

$$x = \frac{c^2}{2}(\varphi - \sin \varphi) \qquad y = \frac{c^2}{2}(1 - \cos \varphi) \tag{46}$$

a to je jednadžba cikloide sa šiljkom u ishodištu koordinatnog sustava. Baza te cikloide je horizontalna i pada u os X. Da ta cikloida prolazi još i točkom C (x_1, y_1), moramo odrediti φ_1 i $\frac{c^2}{2}$ da bude:

$$x_1 = \frac{c^2}{2}(\varphi_1 - \sin\varphi_1) \qquad \frac{x_1}{y_1} = \frac{\varphi_1 - \sin\varphi_1}{1 - \cos\varphi_1} \qquad x_1, y_1 \geq 0 \tag{47}$$
$$y_1 = \frac{c^2}{2}(1 - \cos\varphi_1)$$

To je uvijek moguće, jer je desna strana relacije (47) pozitivna i neprekidna funkcija od φ_1 i raste od 0 $(\varphi_1 = 0)$ do ∞ $(\varphi_1 = 2\pi)$. Ako je $x_1 \neq 0$, $y_1 = 0$, C leži na osi X (tada je $\varphi_1 = 2\pi$) i prema tome dolazi cijeli luk cikloide među dva susjedna šiljka kao vremenski najkraći luk između točaka O i C. Polumjer izvodne kružnice $\frac{c^2}{2}$ odredimo nakon što smo odredili φ_1 iz (47).

Istom metodom možemo riješiti i općenitiji problem: odrediti liniju na kojoj je vrijeme padanja materijalne točke, koja polazi iz O početnom brzinom v_0, do C najkraće.[25]) Kao rješenje pojavljuje se cikloida horizontalne baze, koja prolazi obje zadane točke O i C, a konkavna joj je strana okrenuta prema gore. Baza cikloide nalazi se nad točkom O za $\frac{v_0^2}{2g}$ (put prostog pada potreban da materijalna točka poprimi u O brzinu v_0), gdje je v_0 zadana početna brzina u O.

Razmatrajući problem padanja u polju sile teže već je G. Galilei ispitivao vremenski karakter gibanja po luku donjeg kvadranta kružnice i došao do zaključka, da je vrijeme padanja do najniže točke kraće od vremena padanja po ma kojoj upisanoj poligonalnoj liniji iste početne i konačne točke.[26]) Tako postavljeni problem linije najkraćeg trajanja silaska između dvije zadane točke uzalud su pokušavali riješiti tokom 17. stoljeća, dok nije poziv Joh. Bernoulli-a (1667—1748) u Acta Eruditorum juna 1696 potaknuo prvake nauke da ga konačno riješe. Problem su riješili u danom roku: G. W. Leibniz (1646—1716), de l' Hospital (1661—1704), Jak. Bernoulli (1654—1705), I. Newton[27]) i naravno začetnik njegov Joh. Ber-

noulli. Svi su došli do istog rezultata: tražena »curva celerrimi descensus« (celer = brz, descensus = silazak) jest cikloida horizontalne baze koja ima šiljak u višoj točki. U početku je nazivaju curva celerrimi descensus, linea brachistochrona, linea tachystoptota (ταχύς = brz, πίπτω = pasti) curva oligochrona (ὀλίγος = kratak, χρόνος = vrijeme), dok na kraju ne prevlada naziv brahistohrona.[29]) Jak. Bernoulli rješava odmah već prije spomenuti općenitiji problem.[30])

Joh. Bernoulli uspio je riješiti problem brahistohrone na dva načina: jedan je u biti račun varijacija, a drugi zanimljivo povezivanje tog problema sa problemom puta zrake svjetlosti u sredstvu promjenljive gustoće. Taj optički problem razmatra već Chr. Huygens, no dolazi samo do kvalitativnih zaključaka.[31]) Kao što je poznato, P. Fermat (1608—1665) uzima da zraka svjetlosti ide od neke točke O do točke C vremenski najkraćim putem, t. j. onim za koji je:

$$\delta \int_{O}^{C} dt = \delta \int_{O}^{C} \frac{ds}{v} = 0. \tag{48}$$

Kao uvjet iščezavanja izraza (48) imamo W. Snellov (1591—1626) zakon loma. Uzmemo li odnose kao u sl. 2, možemo ga pisati:

$$\frac{\sin \alpha}{v} = \frac{1}{v} \frac{dx}{ds} = \text{konst.} \tag{49}$$

Zbog (40) vidimo da ćemo povezati problem brahistohrone s ovim optičkim, ako brzinu svjetlosti u (48) uzmemo

$$v = \sqrt{2gy}. \tag{50}$$

Tada će prema (49) diferencijalna jednadžba brahistohrone glasiti:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\sqrt{y}}{a}, \tag{51}$$

ako konstantni faktor označimo sa $\frac{1}{a}$.

Tu jednadžbu možemo pisati:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a^2 - y}{y}, \tag{52}$$

a to je prema (43) diferencijalna jednadžba cikloide.[32]) Prema tome i put zrake svjetlosti u sredstvu, u kojem se brzina svjetlosti mijenja po zakonu (50), i brahistohrona u polju sile teže linija je cikloide. Analogija prestaje kod primjene početnih uvjeta mirovanja u točki O, jer bismo u tom slučaju morali uzeti prema (50) u toj točki brzinu svjetlosti jednaku nuli, što je fizikalno nemoguće. Analogija u općenitom slučaju je potpuna.

U II. susreli smo se s jednom osobinom gibanja materijalne točke na liniji cikloide, koju je izrazila relacija (5): stane li se točka gibati iz šiljka, tada je u polju sile teže, koja djeluje u negativnom smjeru osi cikloide, tlak cikloide na tu točku po veličini jednak dvostrukoj normalnoj komponenti sile koja djeluje — sile teže. Budući da je linija cikloide uz iste uvjete i brahistohrona za sve svoje točke, blizu je pomisao, da joj navedena osobina gibanja pripada zbog njezine brahistohronosti. I zaista je L. Euler[33]) općenito dokazao: kod gibanja po brahistohroni tlak, što ga ona vrši na materijalnu točku, jednak je po veličini dvostrukoj normalnoj komponenti vanjske sile, odnosno centrifugalna sila jednaka je normalnoj komponenti vanjske sile.

Pođemo li od Eulerovog stavka možemo također odrediti brahistohronu za polje sile teže. Po njemu mora biti (sl. 2)

$$m \frac{v^2}{\varrho} = -m g \frac{dx}{ds},$$

a to zbog:

$$v^2 = 2 g y \qquad \text{i} \qquad \varrho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

daje

$$\frac{2 y y''}{\sqrt{1 + y'^2}^{\,3}} + \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0,$$

dakle jednadžbu, koja je identična s (42). Prema tomu rješenje je linija cikloide.

Budući da uz početak gibanja materijalne točke iz šiljka $Š$ u polju sile teže postoji i svojstvo konstantnosti kutne brzine izvodne kružnice (14), možemo i tu osobinu gibanja po liniji cikloide shvatiti kao posljedicu njezine brahistohronosti.

V. JEDNOLIKO GIBANJE IZVODNE KRUŽNICE

Ustanovili smo da je u polju sile teže linija cikloide brahistohrona i da se u tom slučaju izvodna kružnica, povezana s materijalnom točkom, kotrlja jednoliko. Postavimo sada pitanje, koji uvjet mora općenito zadovoljavati sila, da se materijalna točka giba po cikloidi uz jednoliko kotrljanje izvodne kružnice.

Pomoću Newtonovog II. aksioma i parametarskog predočenja cikloide (46), označivši polumjer izvodne kružnice $\frac{c^2}{2} = R$ a uz traženu konstantnost kutne brzine izvodne kružnice ($\ddot{\varphi} = 0$) slijedi:

$$\frac{F_x}{m} = R \sin \varphi \, \dot{\varphi}^2 \qquad \frac{F_y}{m} = R \cos \varphi \, \dot{\varphi}^2 \tag{53}$$

a kako je uz te uvjete

$$R \sin \varphi = \frac{\dot{y}}{\dot{\varphi}} \qquad R \cos \varphi = R - \frac{\dot{x}}{\dot{\varphi}},$$

imamo:

$$\frac{F_x}{m} = \dot{y} \, \dot{\varphi} \qquad \frac{F_y}{m} = - \dot{x} \, \dot{\varphi} + R \, \dot{\varphi}^2. \tag{54}$$

Prema tome:

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{i} \, \dot{y} \, \dot{\varphi} + \vec{j} \, (- \dot{x} \, \dot{\varphi} + R \, \dot{\varphi}^2),$$

a to možemo prikazati:

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{A} + [\vec{v} \, \vec{B}] = \vec{j} \, R \, \dot{\varphi}^2 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \end{vmatrix}, \tag{55}$$

gdje je:

$$\vec{A} \begin{cases} 0 \\ R \, \dot{\varphi}^2 \\ 0 \end{cases} \qquad \vec{B} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{cases} \qquad \vec{v} \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{cases}. \tag{56}$$

Prema tomu se gibanje materijalne točke po cikloidi zbiva uz konstantnu brzinu rotacije pripadne izvodne kružnice, ako se sila može prikazati pomoću (55). Značenje prvog člana na desno je očigledno — to je konstantna sila u smjeru osi Y — drugi član prikazuje silu, koja djeluje okomito na brzinu

$\vec{v}$ i pada u x, y ravninu (odgovara tlaku $\vec{N}$ u II). Principijelna razlika prema prošlim razmatranjima je ta, što uz ove okolnosti linija cikloide ne mora biti ostvarena mehaničkim sredstvima (kao cikloidni žlijeb, ili cikloidno njihalo).

Lako se može pokazati slijedeći odnos. Zbog relacije (55) i (56) vidimo, da je iznos sile u smjeru normale:

$$m\,|[\vec{v}\,\vec{B}]| = m\left|\dot{\varphi}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\right|$$

ili pomoću (46)

$$= 2\,m\,R\,\dot{\varphi}^2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|.$$

Budući da je iznos normalne komponente vanjske sile:

$$m\,|\vec{A}_n| = m\,A\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|,$$

to vidimo, pomoću (56) da je:

$$m\,|[\vec{v}\,\vec{B}]| = 2\,m\,|\vec{A}_n|$$

a to je upravo matematski izraz Eulerovog stavka (v. IV). Time je uspio dokaz stavka: cikloida je brahistohrona linija za sile, pod djelovanjem kojih se materijalna točka po njoj giba uz konstantnu kutnu brzinu rotacije izvodne kružnice. Općeniti oblik tih sila je dan pomoću (55). Budući da član $m\,[\vec{v}\,\vec{B}]$ odgovara tlaku $\vec{N}$, to vidimo da je materijalno ostvarena cikloida brahistohrona linija za konstantnu silu $m\,\vec{A}$, upravljenu u negativnom smjeru od osi cikloide. Vrijeme brahistohronosti τ slijedi iz (56) i ono je:

$$\tau = \sqrt{\frac{R}{A}}\,\varphi_1. \tag{57}$$

To je najkraće vrijeme u kojem materijalna točka može iz mirovanja u O stići točku C (φ_1), gibajući se uslijed djelovanja sile $m\,\vec{A}$ — ono je postignuto gibanjem te točke po prije određenoj liniji cikloide. U slučaju početne brzine u O iznosilo bi to najkraće vrijeme:

$$\tau = \sqrt{\frac{R}{A}}\,(\varphi_1 - \varphi_2)$$

(φ_2 znači kut zakreta koji sada pripada točki O).

Postoji jedno polje sile, koje na materijalnu točku nabijenu elektricitetom djeluje silom oblika (55). To je elektromagnetsko polje, za koje je H. A. Lorentz (1853—1928)[34]) postavio izraz za silu:

$$\vec{F} = e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\,\vec{H}]\right), \tag{58}$$

gdje je e električni naboj, a $\vec{v}$ brzina čestice, $\vec{E}$ električni, a $\vec{H}$ magnetski intenzitet polja. Električki nabijena čestica opisuje u elektromagnetskom polju put — cikloidu — s konstantnom kutnom brzinom izvodne kružnice, ako postoji identitet sila (55) i (58) t. j. ako je:

$$m\vec{A} = e\vec{E} \qquad m\vec{B} = \frac{e}{c}\vec{H} \tag{59}$$

ili prema (56) pisano u komponentama:

$$\vec{E}\begin{cases} 0 \\ \dfrac{m}{e} R\dot{\varphi}^2 \\ 0 \end{cases} \qquad \vec{H}\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dfrac{m}{e} c\dot{\varphi} \end{cases}. \tag{60}$$

Dakle moraju biti $\vec{E}$ i $\vec{H}$ konstantni vektori i to $\vec{E}$ u $\begin{matrix}\text{pozitivnom}\\\text{negativnom}\end{matrix}$ smjeru osi Y, ako je $e \gtrless 0$, a $\vec{H}$ u $\begin{matrix}\text{pozitivnom}\\\text{negativnom}\end{matrix}$ smjeru osi z ako je $e\dot{\varphi} \gtrless 0$ (sve u koordinatnom sustavu sl. 2). Zbog (60) iznosi su tih vektora:

$$E = \left|\frac{m}{e} R\dot{\varphi}^2\right| \qquad H = \left|\frac{mc}{e}\dot{\varphi}\right|, \tag{61}$$

a postoje također relacije:

$$R = \left|\frac{E}{H^2}\frac{mc^2}{e}\right|, \qquad |\dot{\varphi}| = \left|\frac{He}{mc}\right| \tag{62}$$

koje daju pripadni polumjer i kutnu brzinu izvodne kružnice cikloide. Postoji li komponenta električne sile u smjeru osi Z, ona uzrokuje jednoliko ubrzano gibanje u tom smjeru — projekcija puta električne čestice na ravninu x, y ostaje cikloida.

Do navedenih rezultata prvi je došao J. J. Thomson (1856—1940) razmatrajući gibanje električki nabijenih čestica u skrštenom i konstantnom elektromagnetskom polju pod utjecajem Lorentzove sile (58).[35]) Općeniti problem gibanja u konstantnom električkom i magnetskom polju bilo kakve orijentacije uz ma kakve početne uvjete riješio je E. Riecke.[36])

BILJEŠKE

1) M. Cantor: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, II. 1892 str. 186.

J. Wallis: Letter concerning the Cycloid known to Cardinal Cusanus about the year 1450 and to Carolus Bovillus about the year 1500 (Phil. Tr. 1678.)

2) M. Cantor l. c. 1, str. 349; također isporediti: S. Günther: Geschichte d. Mathematik I., 1908 str. 384.

3) G. Galilei odgovara na jedno pismo Cavalieri-u među ostalim i ovo (G. Galilei: Opere IV, 1935 str. 28) 24. veljače 1640: »... Quella linea arcuata sono piú di cinquant' anni che mi venne in mente il descriverla, e l'ammirai per una curvità graziosissima per adattarla agli archi d'un ponte. Feci sopra di essa, e sopra lo spazio da lei e dalla sua corda compreso, diversi tentativi per dimostrarne qualche passione, e parvemi da principio che tale spazio potesse esser triplo del cerchio che lo descrive, ma non fu così benchè la differenza non sia molta.«

M. Marie: Histoire des sciences mathématiques et physiques IV, 1884, str. 64 međutim kaže: »Ce serait, paraît-il, Galilée qui en aurait eu le premier l'idée. Il dit, en effet, dans une lettre écrit à Torricelli en 1639, qu'il s'en était occupé quarante ans auparavant, et qu'il avait songé a en donner la figure aux arches des ponts...«

Izgleda po sadržaju, da bi to trebalo biti isto pismo samo ga M. Marie pogrešno pripisuje upućeno Torricelli-u kao i navodi druge godine mjesto 50 uzima 40 (V. bilješku 4).

4) Tim povodom piše Roberval Mersenne-u (v. G. Galilei Opere IV str. 29): »In Cycloide Torricelli agnosco nostram Trochoidem, nec recte percipio quomodo ipsa ad Italos perveniret, nobis nescientibus...« A Toricelli piše: »At non ego miror quomodo in Galliam ex Italia perveniret, cum viam huismodi Theorema, 40 ab hinc annis a Cl. Galilaeo fuisse promotum, et evulgatum inter amicos, licet ab ipso non demonstratum. Vivunt adhuc testes, et supersunt nonnullae eius scripturae.«

5) To Pascalovo držanje oštro je u literaturi osuđeno. Tako na pr. M. Cantor l. c. 1 str. 806 kaže: »Pascal, der Sohn des nahen Freundes Robervals, machte sich eigentlich zum Sprachrohre dieses schweren Vorwurfes und was die Gehässigkeit des Angriffes noch steigert, er that es im November 1658, also 11 Jahre nach Torricelli's Tod und das war derselbe Pascal dessen physicalische Erfolge auf die Erfindung des Barometers durch Torricelli sich gründeten, derselbe Pascal, der die Grösse des italienischen Gelehrten noch 1651 in einem Briefe an Herrn von Ribeyre ganz und voll anerkannte.«

6) Budući da kod gibanja po nekoj krivulji materijalna točka u konkretnom slučaju često ne može zauzimati sve geometrijske točke, već samo jedan njihov podskup , nazvat ćemo taj podskup-linijom krivulje, dok sam dio linije koji materijalna točka doista prolazi-lukom krivulje. Na pr. kod problema tautohrone ili brahistohrone krivulja je cikloida, linija cikloide njezin dio među dva susjedna šiljka, a dio linije koji materijalna točka doista prolazi — luk cikloide.

7) A. Sommerfeld: Vorlesungen über theoretische Physik I. Mechanik, 1943 str. 187, provodi integraciju uvođenjem kuta tangente

$$\left(\psi = \frac{\varphi}{2}\right).$$

8) J. W. Lehmann: Theorie der Cycloide als Tautochrone (Crelle's Journal f. Math. VI 1830).

9) G. Galilei (Opere/IV l. c. 3, str. 421) u pismu Guid' Ubaldu dal Monte, 29 novembra 1602, opisuje pokus koji mu to pokazuje. Uzevši dva njihala jednake dužine niti »... gli lascio poi nell' istesso momento di tempo andar liberamente, e l'uno comincia a descrivere archi grandi,

simili al BCD e l'altro ne descrive de' piccoli, simili all'FIG: ma non però consuma più tempo il mobile B a passare tutto l'arco BCD, che si faccia l'altro mobile F a passare l'arco FIG. Di che mi rendo sicurissimo cosi: ... nel tempo ch'io numero, verbigrazia, le prime cento reciprocazioni BCD, DCB etc. un altro osservatore numera cento altre reciprocazioni per FIG piccolissime, e non ne numera pure una sola di più: segno evidentissimo che ciascheduna particolare di esse grandissime BCD consuma tanto tempo, quanto ogni una delle minime particolari FIG.« Malo dalje razmatrajući padanje po kružnim lukovima: ... »ma non posso spuntare a dimostrare comme gli archi SIA et IA siano passati in tempi uguali: che è quello che cerco.« Još 1639 u pismu Baliani-u (str. 424) spominje: »... l' ammirabile proprietà del pendulo, che è di fare tutte le sue vibrazioni, grandi, o piccole sotto tempi uguali«.

[10]) G. Galilei Opere IV str. 427. U pismu Reali-u (jun 1637): »Da questo verissimo e stabil principio traggo io la struttura del numeratore del tempo servendomi non d'un peso pendente da un filo, ma di un pendulo di materia solida e grave ... Per evitar poi il tedio di chi dovesse perpetualmente assistere a numerare le vibrazioni, ci è un assai commodo provvedimento in questo modo ...«

[11]) Viviani (1622—1703) htio je pripisati konstrukciju prve ure s njihalom kao regulatorom Galilei-u ili njegovom sinu Vincenzu (1606—1649). Međutim već sam Huygens odlučno odbija to tvrđenje u predgovoru svojeg djela Horologium oscillatorium (sabrana djela sv. XVIII). Također Chr. Huygens: Horologium oscillatorium Ostwald's Klassiker Nr. 192. O tom pitanju, kao i o konstrukciji ura: G. Galilei Opere IV str. 429 itd. J. C. Poggendorff: Geschichte d. Physik, 1879, str. 602 i dalje.

[12]) Chr. Huygens l. c. 11, str. 87: »Mensura enim temporis certa atque aequalis pendulo simplici naturâ non inerat, cum latiores excursus angustioribus tardiores observentur: sed geometria duce diversam ab ea, ignotamque antea penduli suspensionem reperimus, animadversa lineae cuiusdam curvaturâ, quae ad optatem aequalitatem illi conciliandam mirabili planè ratione comparata est. Quam postquam horologiis adhibuimus, tam constans certusque eorum motus evasit, ut post crebra experimenta terra marisque capta, manifestum iam fit et Astronomiae studiis et arti Nauticae plurimùm in iis esse praesidii. Haec ea est linea quam defixus in circumferentia currentis rotae clavus, continua circumvolatione, in aëre designat; à Geometris nostri aevi cycloidis nomine donata, et ob alias multas sui proprietates diligenter expensà: à nobis verò propter eam quam diximus mensurandi temporis facultatem, quam nihil tale suspicantes ac tantùm artis vestigiis insistentes, inesse ipsi comperimus ...« Sam rezultat istraživanja sadržan je u »Propositio XXV (De motu in Cycloide): In Cycloide cuius axis ad perpendiculum erectus est vertice deorsum spectante, tempora descensus quibus mobile, à quocunque in ea puncto dimissum, ad punctum imum verticis pervenit, sunt inter se aequalia: habentque ad tempus casus perpendicularis per totum axem Cycloidis eam rationem, quam semicircumferentia circuli ad diametrum.«

[13]) L. Euler: Mechanica sive motus scientia analytice exposita (editit P. Staeckel) MCMXII str. 71, 182, također prijevod Ph. Wolfersa.

L. Euler: Mechanik oder analytische Darstellung der Wissenschaft von der Bewegung, 1850.

Isp. J. C. Poggendorff l. c. 11, str. 602.

M. Duhamel: Cours de Mécanique I, 1862, str. 430.

[14]) W. Keck: Mechanik III, 1915, str. 145.

[15]) Po M. Cantoru 1. c. 1, III, str. 134 dokaz se nalazi u djelu »La Statique ou la science des forces mouvantes« 1673. U predgovoru I. G. Pardies izričito spominje Chr. Huygensa, koji je taj stavak vjerojatno već prije saopćio, ali bez dokaza.

16) Netočna je tvrdnja G. Loria: Spezielle alg. und trans. ebene Kurven II, 1911, str. 87: »Jedoch wuchs die Wertschätzung derselben (misli cikloide) noch ungemein, als Huygens bemerkte, dass sie die Tautochrone im leeren Raume sei, indem er entdeckt hatte, dass die Kurve von der Eigenschaft, dass schwerer Punkt, der sie durchläuft, immer in derselben Zeit den tiefsten Punkt erreicht, gleichgültig von welchem Punkte er ausgehe, eine gemeine Zycloide mit horizontaler Basis sei, jedoch mit der Konkavität nach oben gerichtet...«

Isto tako M. Marie 1. c. 3, str. 67: »La cycloïde reparaîtra avec éclat dans la periode suivante, lorsque Huygens cherchant à écarter les petites inégalités que doivent necéssairement présenter les oscillations d' un pendule circulaire, se proposa de déterminer la courbe sur laquelle il faudrait faire rouler un corps pour qu'il mît toujours le même temps à arriver au point le plus bas, quel que fût celui d' où on l' eût abandonné, et trouva que cette courbe était la cycloïde.«

Oba autora tvrde da je Huygens dokazao: tautohrona u polju sile teže je cikloida, dok iz samog Horologium oscillatoriuma 1. c. 11 nedvoumno slijedi samo ovo: cikloida je u polju sile teže tautohrona t. j. pitanje postojanja drugih tautohrona ostaje otvoreno.

17) Isaac Newton: Philosophiae naturalis principia mathematica, MDCCXIV, str. 143 također prijevod Ph. Wolfersa: I. Newton: Mathematische Principien der Naturlehre, 1872, str. 162.

18) L. Euler 1. c. 13 str. 182.

19) Po J. C. Poggendorff: Handwörterbuch A. V. Puiseux: Sur les courbes tautochrones (Liouville's Journal IX, 1844),

također P. Appell: Traité de mécanique rationelle I, 1919, str. 351.

20) M. Duhamel 1. c. 13.

21) P. M. Jullien: Problèmes de Mécanique rationelle, 1866, str. 432.

22) I. Newton 1. c. 17, str. 273.

23) L. Euler 1. c. 13, str. 290.

24) Navedeni problem rješava se u gotovo svakom prikazu računa varijacija. U literaturi o mehanici također ga susrećemo često. Na pr. Н. Н. Бухольц: Основной курс теоретической механики I, 1945 str. 332.

25) V. K. Grüss: Variationsrechnung, 1938, str. 140.

26) G. Galilei: Opere IV Discorsi et dimonstrazione mathematiche, Giornata III, str. 411, Propositio XXXVI, Theorema XXII: »... Quo igitur per inscriptos polygonos magis ad circumferentiam accedimus, eo citius absolvitur motus inter duos terminos signatos A, C. Quod autem in quadrante explicatum est contingit etiam in circumferentia quadrante minori, et idem est ratiocinium.«

Na osnovu toga presmiono je tvrditi, da Galilei drži luk kružnice brahistohronom linijom.

27) J. C. Poggendorff, 1. c. 11, str. 606 iznosi tvrdnju: »Leibnitz, damals mit vielen anderen Dingen beschäftigt, erbat sich einen Aufschub von sechs Monaten, erhielt ihn und löste dann die Aufgabe.«

C. J. Gerhardt: Geschichte der Mathematik, 1877, str. 162, tvrdi naprotiv: »Leibnitz, obwohl körperlich leidend, wurde von der Schönheit des Problems so ergriffen, dass er sofort nach Empfang von J. Bernoulli's Aufforderung die Lösung zu stande brachte...«

Uzrok produženja natječaja do Uskrsa 1697 nije bila molba Leibniza, da izradi svoje rješenje, već da omogući i drugima da riješe taj problem, budući da ga je on riješio neposredno nakon objavljivanja. U M. Marie 1. c. 3, VI, str. 243 nalazimo prijevod riječi samog Leibniza: »M. Jean Bernoulli proposa donc publiquement ce problème dans les Actes de Leipsig, et par lettre privée, me demanda d' y consacrer quelque temps. J'aurais pu surseoir à cette recherche, au milieu de tant d' autres

occupations, mais la beauté du problème m' entraîna comme malgré moi et j' en vins à bout heureusement. Je communiquai ma solution à l' auteur et il me transmit la sienne pour être imprimée en temps voulu. Comme au bout de six mois personne n' avait annoncé qu'il eût trouvé la solution ... Mais nous convînmes de prolonger le délai de six autres mois ...«

[28]) Netočna je tvrdnja E. Hoppe: Geschichte der Physik, 1926, str. 26: »... In dieser Arbeit (misli Hor. osc.) weist Huygens auch nach, dass die Zycloide nicht nur Tautochrone, sondern auch Brachistochrone ist«.

[29]) Joh. Bernoulli mijenja ime »curva celerrimi descensus« 1697 u »brachistochrona«. Leibniz usvaja taj naziv i napušta svoj prvobitni »linea tachystoptota«. Jak. Bernoulli zove je u početku »curva oligochrona.« U G. Loria 1. c. 16, str. 87 izgleda kao da su Joh. i Jak. Bernoulli uzeli te nazive kao supstitute nazivu tautohrona.

[30]) M. Marie 1. c. 3, VII, str. 105 navodi prijevod riječi samog Jak. Bernoulli-a: »Si l' on prend deux points quelconques sur la courbe cherchée, l' arc qui joindra ces deux points sera aussi la ligne que le corps pesant devrait suivre pour aller de l' un à l' autre dans le moindre temps possible, en supposant, bien entendu, qu' il part du plus élevé des deux avec la vitesse qu'il aurait déjà acquise en suivant la partie placée au-dessus de la courbe inconnue. Car si l' on admettait le contraire ...«

[31]) Chr. Huygens: Abhandlung über das Licht (Ostwald's Klass. Nr. 20) str. 47.

[32]) Ti rezultati su se duboko dojmili Joh. Bernoulli-a. Tako nalazimo u M. Marie 1. c. 3, VII, str. 171 i ove njegove riječi: »... Je suis arrivé à ce résultat par deux voies, l' une indirecte, l' autre directe. En poursuivant la première j'ai découvert un admirable accord entre la courbe décrite par un rayon lumineux dans un milieu de densité variable et ma brachystochrone ...

... Avant de finir, je ne puis m' empêcher d' exprimer de nouveau l' admiration que j' éprouve en retournant dans mon esprit cette identité inattendue de la tautochrone d' Huygens avec ma brachystochrone. Mais ce qui me frappe le plus, c'est que cette identité ne se recontre que dans l' hypothèse de Galilée: de sorte qu' il est permis de conjecturer que la nature l' ait voulu ...«

[33]) L. Euler, 1. c. 13, str. 165.

[34]) H. A. Lorentz: Enzyclopädie d. math. Wiss., V_2, 1905: Weiterbildung d. Maxw. Theorie, str. 153.

[35]) Lord Rayleigh: The life of Sir J. J. Thomson, 1943, str. 109.

J. J. i G. P. Thomson: Conduction of electricity through gases I, 1928, str. 223.

J. Picht: Einführung in die Theorie der Elektronenoptik 1939, str. 1.

[36]) E. Riecke: Annalen d. Physik 4. F., 4. B., str. 378

E. Riecke: Annalen d. Physik 4. F., 7. B., str. 401

SUMMARY

Cycloid as a Tautochrone and Brachistochrone

by Z. Janković

Part I (Introduction) contains the genesis of Cycloid (fig. 1) and its analytic representation (1). The description of its most eminent geometrical properties together with some historical data follows then.

In Part II (Motion of a Particle on the Cycloid) the properties of the above-mentioned motion are analysed in the field of gravity. We find, starting from Newton's second law, by the help of (1) the differential equation (6) describing the temporal character of motion. Its integration leads to the important result (12) showing that the time of descent is independent of the starting point of motion. The Cycloid is shown in this way in the field of gravity as a tautochrone (relating to the time of descent) or as an isochrone (relating to the time of oscillation). The motion has two remarkable properties more, if we take the starting point in the extremity Š. First we see from (5) the reaction of Cycloid $\vec{N}$ to be then in magnitude the double normal component of the force $\vec{F}$. Second we conclude from (13) the angular velocity of the generating circle to be invariable. The historical considerations about pendulum and clocks close this Part.

Part III (Cycloid as a Tautochrone) gives a more subtle analyse of the tautochronism.

We discuss first the case a) (Force depends only upon the position of the particle) and the application of the Euler's and Puiseux' solutions of two fundamental problems:

1) to determine tautochrones to a known force,

2) to determine forces which make a known line a tautochrone, gives the relation (20) as a characteristic one for the tautochrone motion.

In 1 α) we determine tautochrones for the force of gravity. The relations (20), (15) and (21) lead to the equation (23) and its solutions (25) and (26), compared with (1), show the Cycloid to be the tautochrone for this force. We resolve the same problem in 1 β) by the Duhamel's method.

In 2) we search after forces for which the Cycloid is a tautochrone. The application of relations (20), (15) and (30) gives the expression (31) for the tangential component S of

this force $\vec{F}$ and the relation (32) for its magnitude F. According to the relation (32) Cycloid is a tautochrone only for a constant force directed in the opposite sense of its axis. After that we only touch the problem of composed isochrones and the case b) (Force depends upon the position and the velocity of the particle).

In Part IV (Cycloid as a Brachistochrone) we are concerned with the problem of the line of the quickest descent between the points O and C (fig. 2). For the force of gravity this problem leads, with the help of the calculus of variations, to the differential equation (42), the particle be in O at rest. Its solutions (43), (44), (45) represent a Cycloid. The following rows contain the historical development of inquieries of this problem and a connected one — the particle starting from O with the velocity v_0. The explanation of an interesting connection of this problem with an optical one — the path of the beam of light in a medium of variable optical density — untertaken by Joh. Bernoulli follows. At the end there is shown the property of motion, expressed by (5), to be a special case of an Euler's proposition about brachistochrones.

In Part V (Uniform Motion of the Generating Circle) we discuss the other property of motion, found in II and expressed by (13). The relation (55) gives the answer to the question which force does cause such a uniform motion. Further consideration shows the force in the direction of the normale $|m[\vec{v}\,\vec{B}]|$ to be the double of $|m A_n|$. As the presumptions of Euler's proposition are completed, we are able to announce a new proposition: Cycloid is a brachistochrone for the forces which put into uniform motion the generating circle firmly connected with the particle. After that we determine the time of the quickest descent from the relation (56).

As the Lorentz' force (58), for a crossed and constant electromagnetic field, has the form (55), we are now in position to find the path of an electric charged particle in it without the explicit integration of equations of motion. This path is a Cycloid. Relations (62) give its radius and uniform angular velocity.

In »Notices« some quotations from original works are added in order to explain the text. Some obscurities and incorrectnesses like 3), 16), 27), 28) are pointed out.

Lujo Jakupčević, Zagreb

LOGARITAMSKA TABELA

I. Općenito o tabeli. Ova je tabela konstruirana sa svrhom da nadomjesti dekadske logaritamske tablice od pet decimala. Na sličan način nadomještava logaritamsko računalo troznamenkaste tablice. Ako bi htjeli načiniti takovo logaritamsko računalo, iz kojeg bi se moglo očitavati peteroznamenkaste logaritme, tada bi ono moralo biti veoma dugo. Kad bi na pr. uzeli dužinu od 100 m, onda bi mantise koje dolje navodimo mogli nanijeti ovako:

0,99 146	kao	99	metara,	14	cm	i	6	mm			
0,00 803	„	0	„	80	„	„	3	„			
0,07 009	„	7	„	0	„	„	9	„	i	t.	d.

Slično bi tako mogli naznačiti sve mantise za sve numeruse od 1 do 9.999.

Ako bi takovo logaritamsko računalo od 100 m razdjelili na 100 jednakih djelova po 1 m, mogli bi sve te dužine od 1 m poredati u horizontalne paralele, u razmaku od 1 cm, na površinu od 1 m^2. Tako bi dobili dvodimenzionalnu tabelu, koja bi mogla zamijeniti jednodimenzionalno računalo, dugo 100 m.

Ako svih tih stotinu horizontalnih dužina po metar podijelimo vertikalnim linijama na dm, cm i mm, onda gornje mantise u takvoj tabeli stoje ovako:

0,99 146 na 99 horizontalnoj liniji i to na mjestu gdje je siječe 146 vertikalna linija.

0,00 803 nalazi se na 0 liniji i 803 vertikalnoj

0,07 009 nalazi se na 7 liniji i 9 vertikalnoj i t. d.

Priložena je tabela isto takova kao i opisana, samo je umanjena na 20 cm $\times$ 20 cm. Osim toga na priloženoj tabeli izvršena su neka pojednostavljenja, da bi stvar bila preglednija. Da bi se izbjeglo suvišno ispisivanje potpunih numerusa, ispisane su prve znamenke numerusa izvan tabele na lijevoj strani (100, 200 . . .). Druga i treća znamenka numerusa ispi-

sane su u samoj tabeli (na pr. 72, 57 . . .). Četvrta znamenka numerusa nije ispisana već je točno unešena u razdiobu između jedinica svih troznamenkastih numerusa (između svaka dva broja tabele 10 crtica, dužih i kraćih). Da bi i ovdje bio brži pregled, svaka peta crtica markirana je debljom iznad nje. Time je potpuno omogućeno logaritmiranje svakog četveroznamenkastog broja.

II. Logaritmiranje. Logaritmiranje se sastoji:

1. od traženja točke koja odgovara zadanom numerusu;

2. očitavanje te točke s obzirom na njen smještaj u mreži linija, da se dobije mantisa traženog logaritma.

Primjer 1. log 9,365 = ?

1. Prvu znamenku numerusa na tabeli uvijek nalazimo na lijevoj strani izvan tabele; u našem je to slučaju 900. Drugu i treću znamenku nalazimo u grupi brojeva, koji od 1 do 99 pripadaju k 900, a ispisani su u samoj mreži. U našem slučaju treba da nađemo 36. Preostaje nam još broj 5. Nalazimo ga kao 5 crticu između 36 i 37. Tako dobivena točka predstavlja na tabeli numerus 9365.

2. Preostaje nam sada samo da tu točku očitamo ne više u vezi s numerusom, već s obzirom na mrežu, koja označava mantise logaritama.

S desne strane tabele nanešena je numeracija linija, koje nam prikazuju prve dvije znamenke mantise. Nalazimo, da se crtica, koja nam označava naš numerus 9365, nalazi na 97 horizontalnoj liniji. Tako dobijemo 97 kao prve dvije znamenke mantise. Ostale tri znamenke mantise naći ćemo pomoću vertikalnih linija. Kako vertikalnih linija ima ukupno 100 (a ne 1.000) — što je naznačeno na gornjem i na donjem rubu mreže — to će razmak između svake dvije vertikalne linije značiti 10 jedinica posljednje (pete) znamenke mantise, prema tome 5-tu znamenku mantise treba očitavati približno. Vidimo, da se tri posljednje znamenke mantise nalaze između 150 i 160. Koja će to biti točno mantisa, očitat ćemo lako ovako: kako se iz tabele vidi, crtice nisu jednake duljine, već duže ili kraće. Duže linije znače neparne brojke (1, 3, 5, 7, 9), a kraće parne (2, 4, 6, 8, 0). Posljednju znamenku mantise samo oko će odmah odrediti i to prema smještaju samih linija unutar razmaka od 10 jedinica. U našem je to slučaju znamenka 1. Prema tome je log 9,365 = 0,97 151.

Primjer 2. Odredi log 118,6. Prvu znamenku nalazimo s lijeve strane tabele kao 100. Drugu i treću znamenku nalazimo u pripadnoj grupi znamenaka kao 18; 4 znamenku (broj 6) nalazimo kao šestu točku između 18 i 19. Sada nađenu točku očitavamo kao logaritam: ona se nalazi na 7 horizontalnoj liniji, te između 400 i 410 vertikalne linije. Od oka vidimo da bi to moglo biti 407, 408 ili 409 linija. Budući da je crtica kraća, to se radi dakle o parnoj znamenci; to može biti samo broj 8; prema tome je log 118,6 = 2,07 408.

III. A n t i l o g a r i t m i r a n j e. Neka je poznat logaritam nekog broja i neka je on jednak 0,95918. Kako ćemo naći numerus? — Ponajprije treba da nađemo točku, koja odgovara tom logaritmu, te da je očitamo kao numerus. Prema svemu što smo dosada kazali, ta se točka nalazi na presjecištu 95 horizontalne linije i 918 vertikalne linije — znači između 910 i 920 vertikalne linije i to zabilježena (zbog broja 8) kratkom crticom blizu mantise 920. Njeno očitanje u pripadnom sistemu znamenaka numerusa je slijedeća: Ponajprije pogledamo kojoj stotici s lijeve strane tabele ta točka pripada — vidimo da je to 900. Zatim pogledamo, između kojih se brojaka nalazi na samoj liniji — vidimo da je to između 10 i 11; znači — bit će prema dosada izloženom prve tri znamenke numerusa jednake 910. Ako točnije pogledamo, gdje se ta točka nalazi, vidimo da je točno na trećem razdjelu između 10 i 11, te će prema tome numerus glasiti 9,103. U nekim slučajevima može se (naročito u gornjoj polovici tabele) očitati i 5 znamenka numerusa.

Još jedan primjer: Logaritam traženog broja jednak je 2,12289, traži se numerus. Točka se nalazi na križanju 12 horizontalne i 289 vertikalne linije. S obzirom na prvu znamenku numerusa, točka pripada grupi 100. Na samoj liniji točka se nalazi između 32 i 33 (dakle 132 . . .), i to između sedme i osme crtice u tom intervalu (dakle 1327 . . .), a kako se točka nalazi u razmaku posve kraj sedme crtice i to desno od nje, traženi će numerus biti 132,71.

Da se očitavanje logaritama čim više olakša, u mreži linija su deblje izvučene 0 i 5 linije, tako da se (bez točnijeg traženja u numeraciji linija) vidi odmah na kojim se linijama točka nalazi, t. j. kolik je logaritam.

Različitim obojenjem i drugim pomagalima mogla bi se tabela načiniti mnogo preglednijom i prikladnijom za rad.

Analogno ovoj tabeli mogle bi se izraditi tabele, koje bi nadomjestile različite druge tablice od 5 decimala kao na pr. tablice logaritama goniometrijskih funkcija, tablice prirodnih vrijednosti goniometrijskih funkcija, tablice potencija i t. d.

Na ovakovim tablicama mogle bi se računske operacije vršiti geometrijskim zbrajanjem i oduzimanjem dužina pomoću prenosača dužina, slično kao na logaritamskom računalu.

Dodajem da je samu tabelu izradio prof. Vladimir Jirasek, pa mu se ovom prilikom toplo zahvaljujem.

RÉSUMÉ

Sur un tableau logaritmique

Par L. Jakupčević

La Note contient la description d'un tableau à deux dimensions — un réseau de lignes droites muni de certains signes (points, traits, nombres). Le tableau sert à calculer, à quatre décimales précises, les logarithmes des nombres à 4 chiffres.

L'aspect du tableau résultera de la description de son emploi; celui-ci à son tour sera expliqué par un exemple.

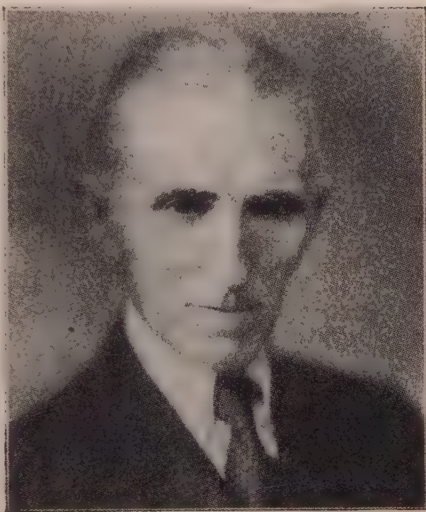
Soit à calculer log 11,86 en se servant du tableau logarithmique.

Le premier chiffre, 1, du logarithmand se trouve inscrit comme 100 sur le coté gauche du tableau; les deux chiffres suivants, 1 et 8, en sont inscrits comme 18 dans le tableau lui-même, dans la bande horizontale correspondant au nombre 100 de tout-à-l'heure. Le 4-ième chiffre, 6, est marqué comme un point entre les nombres 18et 19 de la bande. C'est justement ce point qu'il faut interprêter commer logarithme en re rendant compte de la position du point dans le réseau. Le point se trouvant sur la 7-ième ligne (le nombre total de celles-ci est de 100), les deux premiers chiffres de la mantisse seront 07; le point étant situé entre les colonnes 400 et 410 — marquées sur les cotés supérieure et inférieure du tableau — les deux chiffres suivant de la mantisse seront 4 et 0; c'est à coup d'oeil qu'on détermine le 5-ième chiffre; dans notre cas, il ne peut être que 7 ou 8 ou 9; le trait étant court, le cinquième chiffre de la mantisse sera pair donc dans notre cas 8.

Finalement log 1,186 = 1,07408.

UGAO ZA SVAKOGA

NIKOLA TESLA (1856—1943)



Tesla u dobi od 78 godina.

U vrijeme minulog svjetskog rata (7. I. 1943.) umro je u New-Yorku u dobi od 86 godina, nakon 58-godišnjeg boravka u Sjedinjenim državama Amerike, naš zemljak Tesla, obretnik-učenjak i izumilac, pionir niskofrekventne i visokofrekventne tehnike, kakvih malo broji povijest velikih naroda. U posljednjih dvadesetak godina naše naučne institucije sjetile su se nekoliko puta svog zemljaka u dalekom svijetu. Povodom osamdesetgodišnjice Teslina života, krajem svibnja 1936., priređene su proslave u Zagrebu i Beogradu, zatim u Ljubljani, Sofiji i Parizu.[1] Naši i strani stručni i naučni časopisi donosili su prikaze Teslina života i rada. Nakon navršene 75-godišnjice upravljene su Tesli čestitke učenjaka sa sviju strana svijeta.[2] Godine 1926. podijelili su mu počasni doktorat zagrebačko i beogradsko sveučilište te praška politehnika, a god. 1896., kad se njegovo ime svuda čulo, izabran je on članom Jugoslavenske akademije u Zagrebu. Smatramo dužnošću, da u nizu prirodoslovaca, koje je tečajem rata pokosila smrt, nekoliko redaka u ovom časopisu posvetimo uspomeni ovog našeg čovjeka, koji pripada cijelom svijetu.[3]

1. — Put Teslina života je vrlo zanimljiv. Rodio se 10. VII. 1856. u Smiljanu (Lika), kao sin pravoslavnog svećenika. God. 1875/6. i 1876/7. polazio je visoku tehničku školu u Grazu. Upisao se najprije u odsjek u kojem se postizavala kvalifikacija za srednjoškolskog nastavnika. Zanimao se napose za fizikalne i tehničke probleme, istakao se kao odličan đak, dolazio profesorima s originalnim mislima i predlozima, i već je u ono vrijeme razmišljao o konstrukciji električnog motora bez kolektora. Iza toga studirao je neko vrijeme u Pragu, no čini se, da radi svog nemirnog duha i materijalnih prilika nije postigao formalnu kvalifikaciju inženjera, kakvu nije imao ni njegov veliki kasniji takmac Marconi. Prvo namještenje dobiva Tesla god. 1880. u Budimpešti i radi u inženjerskom

---

[1] U Beogradu je tom prilikom osnovan za unapređenje nauke i tehnike Teslin institut, koji izdaje biblioteku »N. T.« Dosad su izašla dva sveska ove biblioteke: knjiga I, **Polifazni sistem i motori naizmenične struje** (Beograd 1940); knjiga II, **N. T. i njegovo delo (osnovi elektrotehnike visokih frekvencija i radiotehnika**, Beograd 1946). Obje knjige je napisao inž. S. Bokšan.

[2] Dolaze ovdje imena Millikan, Compton, de Forest, Mac Farlane Moore, W. H. Bragg, Austin, Alexanderson, Ferrié, Zenneck, Kiebitz, Arco, Korn i dr. Te su čestitke odštampane u beogradskom časopisu **Naša pošta,** god. X, sv. 100—1 (1932). Sakupio ih je američki publicista Kenneth Swezey s namjerom, da tim darom iznenadi svojeg prijatelja Teslu. Swezey je namjeravao napisati biografiju Tesle i zamolio ga za suradnju, što je ovaj odbio. Mislio je, da će sâm moći napisati životne uspomene. Iza Tesline smrti napisao je takvu biografiju, John J. O'Neill, pod naslovom **Prodigal Genius — the life of Nikola Tesla; New-York 1944.** O'Neill je »science editor« novina New-York Herald Tribune.

[3] U **Godišnjaku zagrebačkog sveučilišta** napisali su članke o Tesli: Scott, Görges, Kiebitz i naši stručnjaci Vidmar, Plohl. Prikazi Teslina rada izašli su i u **»Prirodi«:** god. 1936, str. 196; god. 1944, str. 99, te u **Nastavnom Vjesniku:** knj. 35, str. 192, 299, 345, (1926/7); knj. 38, str. 47. (1930/1); knj. 44, str. 200 (1935/6).

uredu za brzojav te u tvornici električnih strojeva tt. Ganz. Sâm T. navodi, da je već god. 1882., za svog boravka u Budimpešti, u zakretnom magnetnom polju našao rješenje problema motora za izmjeničnu struju. Ostvarenje takvog stroja bilo je prvi cilj njegova rada. Te je godine Tesla otputovao u Pariz. Bio je namješten u jednom poduzeću za električne strojeve, koje je bilo u vezi s Edisonovim društvom u Americi. Upoznao se ondje s Amerikancima i god. 1884. zaputio u Novi Svijet, koji je onda primao talentirane ljude iz Evrope i omogućio im slobodan rad. Radio je najprije u Edisonovom laboratoriju, zatim je za jedno novo društvo konstruirao regulator za lučnu lampu, kakav se onda upotrebljavao za uličnu rasvjetu u New-Yorku. God. 1887. dobio je T. laboratorij (društvo Tesla Electric Co.), u kojem je mogao da samostalno radi i da praktički ispita novi sistem električnih strojeva i instalacija.

Rezultate laboratorijskog rada najavljivao je T. velikim brojem patenata. Predmeti nekih ovih patenata jesu: prenos električne energije (zakretno magnetno polje), dvofazni sinhroni motor, motor s kratkospojenom armaturom i kontaktnim prstenima, transformiranje i razdioba električne energije, motor za jednofaznu struju, multipolarni strojevi i t. d. Tesline je patente otkupila Westinghouse (Pittsburgh), koja je bila glavni proizvađač strojeva za izmjeničnu struju.

U vrijeme Teslina zahvata u tehniku jake struje imala je izmjenična struja malen udio u praksi. God. 1881. je ova struja u Americi bila tako nepoznata, da je znanstveni odjel američkog patentnog ureda odbio jedan patent transformatora s motivacijom, da je nemoguće iz sekundarnog kruga dobiti veću jakost struje nego što je ima primarni krug. Navodi se, da u to vrijeme nije u Americi nijedan generator za izmjeničnu struju bio u pogonu.

Većina stručnjaka isticala je prednosti stalne struje, koja je davala dobru lučnu svjetlost, nazvanu malim bratom Sunca, i za koju su služili prilični motori. Poteškoće su ovdje bile s prenosom i razdiobom električne energije. U izmjeničnoj struji, za koju se brzo našao ekonomičan prenos pomoću transformatora, mnogi su vidjeli budući tehnički napredak. No glavna je poteškoća bila što za tu struju nisu postojali motori. Bilo je mnogo pokušaja i predloga da se tomu doskoči, no konačno rješenje dao je Tesla otkrićem zakretnog magnetskog polja i patentima iz god. 1887/8.

Prvi uspjeh novog višefaznog sistema bile su velike hidrocentrale na slapovima Nijagare (1891—1896). Bili su sagrađeni dvofazni generatori od 5000 k. s., što je bila u ono vrijeme nečuvena jakost. Time je izveden u Americi prvi prenos električne energije i to u industrijski grad Buffalo. Nešto ranije, god. 1891., izveli su u Evropi prvi prenos prema nacrtu inž. Dolivo-Dobrowolskoga. Sa vodopada rijeke Neckar dovedena je trofaznim sistemom snaga 300 k. s. u 175 km udaljeni Frankfurt na M.

U tehničkim listovima raspravljalo se i o prioritetu Teslinih iznašašća. Navodilo se na pr., da se u Teslinim patentima radi o dvofaznim a kod Dolivo-Dobrowolskoga, koji je uveo nazive Drehstrom, Drehfeld, o trofaznom sistemu, spominjao se rad Ferrarisa i drugih stručnjaka. U jednom takvom slučaju iznio je naš drugi izumilac Pupin, iz Banata, argumente u prilog Tesle. I njemački stručnjaci F. Braun i C. Heinke napisali su, da je u Teslinim patentima temelj svim strojevima sa zakretnim poljem.[4]

---

[4] Najvažniju ulogu u ovoj stvari imala je poslovno-financijalna strana društava u Americi i Evropi, koja su osnivala električne centrale i gradila strojeve. God. 1888., kod preuzimanja patenata, isplatio je George Westinghouse Tesli svotu od milijun dolara. Sa 500.000 dolara namirio je Tesla A. K. Browna, koji je financirao njegove prijašnje eksperimente. Prema ugovoru trebao je Tesla kroz 15 godina primati po 1 dolar za svaku proizvedenu konjsku snagu. Taj je ugovor bio zapreka, kad se god. 1892. društvo Westinghouse, radi financijskih razloga, moralo sjediniti s nekim drugim društvima. Tesla se dragovoljno odrekao ovih tantijema. Učinio je to s razloga, što je George Westinghouse bio u Americi prvi, koji je shvatio značenje njegova rada i za nj se zauzeo. Prema procjeni O'Neilla, pisca Tesline biografije, radilo bi se ovdje o svoti od kojih 12 milijuna dolara. Međutim u jednoj bilješci navodi O'Neill da ovaj ugovor nije sigurno dokumentaran.

Na kraju 19. stoljeća Teslini patenti za višefazni sustav i indukcijski motor doprinose mnogo problemu svjetske elektrifikacije. Kako je praksa pokazivala velike prednosti višefaznog sistema, gradili su kaloričke i vodene centrale za taj sistem, elektrotehnika se razvijala, kako je Tesla predviđao, električni su motori ulazili u tvornice, smanjen je teški fizički rad čovjeka, čula se riječ, da elektricitet donosi ljudima slobodu.

2. — U radu s niskofrekventnom izmjeničnom strujom nije se Tesla dugo zadržavao. Već god. 1889. prešao je na novo zanimljivije područje: na visokofrekventne električne titraje (struje visoke napetosti i visoke frekvencije, Tesline struje). God. 1891., 1892., 1893. držao je on eksperimentalna predavanja o tom u velikim gradovima Amerike i Evrope (New-York, London, Paris, Filadelfija, St. Louis). U Evropu je dopremio veliku svoju aparaturu i strojeve. Predavanju u Royal Institution (London) prisustvovali su prvi engleski učenjaci: W. Thomson, Rayleigh, Perry, Ayrton, A. Siemens, W. H. Preece, a od vladalačke kuće princ od Walesa. Ta su predavanja naišla na priznanje svih svjetskih stručnjaka. Rektor tehnike u Grazu A. Ettingshausen posvetio je imatrikulacioni govor Tesli, negdašnjem đaku ove škole (1893).[5] Mogli bismo kazati, da je Teslina »zvijezda« u to vrijeme kulminirala.

Na novom području konstruirao je Tesla najprije razne tipove (mašinskih) visokofrekventnih generatora. Sa strojem od 480 polova u statoru došao je do frekvencija 15000 u sek. Načinio je i strojeve s istoimenim magnetnim polovima i prvi upotrebio t. zv. cik-cak-namatanje (T e s l i n o n a m a t a n j e). Ti su strojevi davali neprigušene električne titraje i valove. Iz njih su se razvili generatori Fessendena, Alexandersona i Goldschmidta, s kojima je prijašnja radiotelegrafija postizavala najveće dosege.

Iza ove direktne metode za dobivanje visokofrekventnih struja razvio je Tesla metode osnovane na izbijanju kondenzatora. Bitni je dio ovih uređaja T e s l i n t r a n s f o r m a t o r (T e s l i n s v i t a k, T e s l a c o i l). To je prvi transformator bez željezne jezgre, osnovan na rezonanciji, s uljem u svrhu izolacije. Njim se postizava mnogo puta veća napetost, nego što bi je dao obični transformator. Primarni krug s iskrištem vrši ulogu transformiranja na visoku frekvenciju. Tesla je ovom metodom prvi došao do milijunskih napetosti kod frekvencija od nekoliko stotina tisuća u sek. On je stvaratelj visokofrekventne tehnike i bio je duže vrijeme u tom samovladar.

Već s prvom ovakvom aparaturom dobivao je Tesla u ono vrijeme neočekivane efekte. Visokofrekventne struje u otvorenom krugu rasvjetljuju žarulju, tjeraju motor, lakše prolaze kroz plinove nego kroz metale (pojavi impedancije) i t. d. Svoje pokuse primjenio je Tesla na tri područja: 1. u svrhu nove rasvjete; 2. u fiziološke svrhe; 3. u svrhu prenosa električne energije i signaliziranja u daljinu bez metalnog voda.

U ono vrijeme bila je plinska rasvjeta vrlo nezgodna, a električna u početnom razvitku. Neekonomske žarulje sa lomljivom niti od ugljena uveo je Edison u praksu. Bilo je poznato da kod ovih izvora od ukupnog žarenja otpada oko 1% na vidljivu svjetlost. Tesla je odbio mišljenje, da se ekonomska rasvjeta može postići popravljanjem starih metoda i poznatih izvora svjetlosti. Držao je, da će hladna luminiscentna svjetlost vakuum-cijevi, uzbuđena visokofrekventnom napetosti, biti svjetlost budućnosti. Na tom području Tesla je vrlo mnogo eksperimentirao pa i bastlao. Interesantne su i za današnje vrijeme njegove jednopolne vakuum-cijevi, koje možemo smatrati prvim punktal — lampama. U središte vakuum-cijevi stavlja on puce od raznih tvari, koje podnose visoku temperaturu (ugljen, karborund, cirkon i dr.), i veže ga s polom trans-

[5] Za svog boravka u Evropi god. 1892. posjetio je Tesla svoj rodni kraj. 24. V. došao je u Zagreb. Bilo je već u to vrijeme aktuelno pitanje o gradnji električne centrale: da li treba sagraditi kaloričnu centralu ili upotrebiti vodenu snagu. Pomišljali su da iskoriste pad rijeke Mrežnice. Na konferenciji s načelnikom Amrušem, gradskim senatorima i inženjerima držao je Tesla kratko predavanje i preporučio gradnju centrale na Plitvičkim jezerima.

formatora. Eksperimentirajući s takvim cijevima zaključio je Tesla, da se naglim promjenama potencijala i »molekutarnim bombardiranjem« mora promijeniti struktura tvari.[6] Tesla je kod ovih pokusa našao, da neki oksidi, nevodiči kod obične temperature, vode električnu struju kod visoke temperature. Na takvom pojavu se osniva Nernstova žarulja.

Najpoznatiji su Teslini pokusi kod kojih svijetle vakuum-cijevi bez elektroda u blizini Teslina transformatora ili u elektrostatskom polju među pločama ili žicama, koje su vezane na polove transformatora. God. 1893. za izložbu u Chicagu, koja je bila priređena u proslavu 400-godišnjice otkrića Amerike, načinio je Tesla takav pokus među pločama udaljenima $5^1/_2$ m. Na toj izložbi izložio je svoje motore, generatore, transformatore, cijevi i drugu aparaturu. Držao se u to vrijeme u Chicagu svjetski kongres električara, na kojem je Tesla držao predavanje o svojem novom izumu, mehaničko-električnom oscilatoru. Izložbu je posjetio u svojoj 72. godini života Helmholtz, kojeg su izabrali za počasnog predsjednika kongresa. Tesla je već u ono vrijeme radio s cijevima od stakla, koje daje lijepe efekte fluorescencije u raznim bojama. Izložio je cijev, na kojoj su bile riječi »dobro došli električari« i cijevi s imenima Helmholtz, Faraday, Maxwell, Henry, Franklin i — Zmaj Jovan.[7]

Bilo je u ono vrijeme fizičara i tehničkih stručnjaka, koji su držali, da će se iz Teslinih pokusa razviti »svjetlost budućnosti«. Očekivali su idealno rješenje problema rasvjete, kod kojeg će na svakom mjestu svijetliti lampa bez direktnog priključka na napetost i gdje ne će trebati nadoknađivati izgorjele žarulje. Sâm Tesla kazao je jednom prilikom: »Teško je danas prosuditi, što su ti pojavi u svoje vrijeme značili; mi težimo uvijek za novim senzacijama, no brzo postajemo prema njima ravnodušni.«

Tehnika rasvjete nije prolazila putem, koji je Tesla u svoje vrijeme predviđao. Ostala je kod konzervativnih metoda, osnovanih na temperaturnom žarenju. Tesline cijevi i cijevi, s kojima je radio Amerikanac Mac Farlane Moore (1904.), ostale su lijepi predmeti za demonstraciju, no u praksu nisu mogle ući.

3. — Znatan je Teslin prinos proučavanju fizioloških učinaka visokofrekventne struje. Kako je on bio prvi, koji je radio s neprigušenim električnim titrajima velike energije, tako je on prvi mogao konstatirati, da je vrlo visoka takva napetost neopasna za čovječje tijelo i da izvodi učinke topline. Spominje se, da je Tesla god. 1891., radeći s frekvencijom od 700.000/sek., pustio kroz svoje tijelo struju, koja je rasvjetljavala 7 žarulja.[8] Kod tumačenja ovih pojava shvatio je on ljudsko tkivo kao niz kondenzatora.

God. 1910., na kongresu fizikalne terapije u Parizu, nazvana je primjena Teslinih struja u medicini imenom đarsonvalizacija. Raspravljalo se u ono vrijeme o prioritetu među publikacijama Tesle i d'Arsonvala.

4. — Teslin rad sa strujama visoke napetosti i visoke frekvencije pada kratko vrijeme iza velikog Hertzova otkrića električnih valova.

---

[6] O'Neill, pisac Tesline biografije (str. 150), ide tako daleko, da ovakvu jednopolnu lampu (molecular bombardment lamp) smatra pretečom ciklotrona i navodi za to neke razloge. — Spomenut ćemo, da isti autor Teslina istraživanja (iz god. 1890—1892) dovodi u vezu sa slijedećim otkrićima: 1. kozmičke zrake; 2. umjetna radioaktivnost; 3. razbijanje atoma; 4. elektronski mikroskop; 5. jedno vrlo specijalno zračenje (X-zrake). Kad je god. 1895. Röntgen publicirao svoje otkriće, Tesla je drugim putem, pomoću svog »specijalnog zračenja«, načinio slične fotografske snimke kakve je dobivao Röntgen. Ponovio je svoje prijašnje eksperimente i snimke poslao Röntgenu, koji mu je odgovorio: slike su vrlo interesantne i budite tako ljubezni pa mi razjasnite, na koji ste ih način dobili (O'Neill, c. d. str. 154). — Bilo bi zanimljivo, da se istraži ne nalazi li se možda u Teslinoj ostavštini i Röntgenov list iz god. 1895.

[7] Vjerojatno je, da se Helmholtz začudio, što je Tesla u društvo najpoznatijih fizičara stavio svog zemljaka — pjesnika. Međutim takva stvar vrlo dobro odgovara ukusu američkog društva.

[8] v. Bokšan, c. d. str. 174.

Sâm Hertz, koji je umro 1. I. 1894., nije vjerovao, da bi se njegova aparatura i metoda mogla upotrebiti u svrhu signaliziranja u daljinu. Tesla je u ono vrijeme imao gotovu dosta jaku visokofrekventnu aparaturu i odmah je iznio misao, da će ova aparatura omogućiti prenos signala i prenos energije bez metalnog voda. God. 1893., na predavanju u Franklinovu institutu (Filadelfija), opisao je on budući prenos energije i signaliziranje. U tom opisu dolazi stanica za pošiljanje s visokofrekventnim izvorom (generatorom ili transformatorom), na koji je s jedne strane priključen odvod u zemlju, a s druge uzdignuta ploča (antena). Na stanici za primanje zamišlja Tesla aparaturu sa samoindukcijom, kapacitetom, antenom i »zemljom«, što sve mora biti u resonanciji s odaslanom frekvencijom.

U Evropi je bilo više stručnjaka, koji su laboratorijske Hertzove pokuse prenesli napolje i kušali ih upotrebiti u svrhe brzojava bez žice. Početni uspjesi ovog rada, koji je nazvan električnom alkemijom, bijahu maleni i nesigurni. Izvodili su se pokusi sa kratkim valovima, s nepouzdanim iskrištima i s Branlyjevim kohererom, nisu postojali instrumenti za visoku frekvenciju, nije bila jasna uloga zračne antene, bilo je nepoznato rasprostiranje valova (prostorni i površinski valovi). Primanje s kohererom bilo je tako nesigurno, da su neki kasniji stručnjaci kazali, da bi telegrafija valovima brže napredovala, da taj aparat nije nikad bio izumljen. — Mogli bismo reći da su god. 1896/7, u kratkim vremenskim razmacima, tri stručnjaka postigla uspjehe, koji se mogu nazvati porodom radiotelegrafije na malene daljine: u Evropi A. S. Popov i G. Marconi, u Americi naš zemljak Tesla.

12. III. 1896., na jednom predavanju u Petrogradu (Lenjingradu), demonstrirao je Popov signaliziranje na daljinu 250 m. Služio se uglavnom s Hertzovom aparaturom, a za primanje Morseovih signala upotrebio je koherer, antenu i odvod u zemlju. — U svibnju 1897. uspjelo je Marconiju, nakon dužeg eksperimentiranja, primanje signala iz daljine 5 km između engleske obale i jednog otoka u bristolskom kanalu. Marconi je radio s aparaturom Hertza, Popova, Branlya, Righija, uzeo je antenu i odvod u zemlju u obje stanice (Teslin predlog iz god. 1893). U Londonu je odmah osnovano Marconijevo društvo za brzojav bez žice sa svrhom, da se taj izum upotrebi i raširi u ratnoj i trgovačkoj mornarici. Društvo je raspolagalo s glavnicom od 200.000 funti. Javljali su se i drugi eksperimentatori i iznosili raniji svoj rad. Engleski ministar W. H. Preece, koji je financijalno omogućio Marconijeve eksperimente, poslužio se Kolumbovom anegdotom i rekao: Predšasnici i rivali Marconijevi su držali u ruci jaje, no Marconi je bio prvi koji je znao, da to jaje uspravno položi.

U isto vrijeme radio je New-Yorku Tesla. 13. III. 1895. zadesila ga je teška neprilika: požarom bio je posve uništen njegov laboratorij, kojeg je uredio s ogromnim trudom. Ne upuštajući se u velike i daleke planove s čednom pripomoći tt. Morgan (40.000 dol.) uredio je novi laboratorij u ulici Houston i u njem načinio stanicu za pošiljanje. Stanicu za primanje smjestio je na lađu, koja je plovila rijekom Hudson. Raspolažući sa strojevima razmjerno malene snage, postigao je Tesla u proljeću 1897. vezu ovih stanica na daljinu 25 milja i izvijestio o tom 9. VII. 1897. u Electrical Review. — 2. IX. 1897. najavio je patente za svoj sistem, a iduće godine, na izložbi u New-Yorku (Madison Square Garden), demonstrirao je svoj rad.[9]

God. 1899. sagradio je Tesla na visoravni gorja Colorado (2000 m nad morem) laboratorij sa stanicama za pošiljanje i primanje. Upotrebio je najjača tehnička sredstva onog vremena. Za pogon visokofrekventne aparature služio mu je agregat od 200 kilovata. Radio je s antenama visokim 70 m. Pomoću visokofrekventne aparature dobivao je na desetke metara duge vještačke munje. Postizavao je napetosti, koje su procije-

---

[9] Podaci su izneseni ovdje prema O'Neill, cit. d. str. 126. U nekrologu povodom Marconijeve smrti navodi F. Schröter, da su spomenuti Teslini eksperimenti (na daljinu 32 km) bili već g. 1896. (Telefunken Zeitung 77, str. 6, 1938).

njene na 12 milijuna volta.[10] I stručnjaci (na pr. Eccles, Armstrong, g. 1944.) navode, da je Tesla primao signale iz daljine 1000 km (na kopnu!). Držao je, da su prilike za širenje električnih valova u visini 2000 m mnogo povoljnije nego u nizini.

Vijesti o Teslinom radu na ovom području dolazile su u Evropu počevši od god. 1897. Po tim vijestima Teslin sustav radi s neprigušenim, mnogo stotina metara dugim valovima, koji se šire po zemaljskoj površini bez obzira na zapreke i koji prolaze kroz zemlju. Eccles navodi (g. 1933.), da su se povodom Teslinih pokusa raširile vijesti, da će jedno američko društvo sagraditi radiostanice u New-Yorku i u Irskoj, da je radi toga pala cijena podmorskih kabela i ponovno se razvila naučna diskusija o širenju valova.

Međutim je Marconi iskušavao mnoga sredstva u svrhu brzojava na velike daljine. Od kratkih Hertzovih valova prešao je na duge, od Ruhmkorffova induktora na generator, od neudešenog oscilatora s vrlo prigušenim titrajima na Teslin udešen sustav. Mreža brodskih Marconijevih stanica širila se sve jače. God. 1900. demonstrirao je on svoj popravljeni sistem američkoj mornarici. Radio je na daljinu 110 km. — 12. XII. 1901. uspjelo je Marconiju prvi puta, da iz jake stanice Poldhu u Engleskoj pošalje Morseove signale preko Atlanskog oceana 3000 km daleko do mjesta St. John na otoku New Foundland. Vijest o velikom Marconijevom uspjehu bila je raširena po cijelom svijetu.[11] Taj uspjeh, postignut s Teslinom aparaturom, bio je psihološka i financijalna zapreka daljem Teslinom radu. Na kraju je Marconiju uspjelo, da njegovi patenti prodru i u Ameriku.

Rezultate rada na Coloradu iznio je Tesla u patentima i u nacrtu, koji je nazvan svjetskim sistemom (world system). U tom su nacrtu razvijene misli o budućnosti sviju grana tehnike bez žica. Teslini patenti toga vremena obuhvaćaju rotacione prekidače, rotaciona i sastavljena iskrišta i njihovo hlađenje, prvu konstrukciju tikera za primanje neprigušenih valova i dr.

Potporom tt. Morgan (150.000 dol.) Tesla je g. 1901. počeo sa izgradnjom nove velike stanice na otoku Long Island, 60 milja daleko od New-Yorka. Radi financijalnih poteškoća i radi opsežnog komercijalnog rada Marconijeva društva, nije ova stanica (»Teslin toranj«) dovršena, i Tesla je 1905. g. prekinuo praktički rad na ovom području. U vrijeme prvog svjetskog rata ova je stanica srušena.

U tehničkoj literaturi nije Teslin rad izražen kako bi trebalo. Naknadno su upozoravali na njegove zasluge francuski inženjer Girardeau, američki stručnjaci Austin, Behrend, zatim Eccles, Zenneck i dr.

Značajna je crta Tesline ličnosti, što nije težio da materijalno iskoristi svoje mnoge izume i otkrića. Bogatstvo svojih misli spojio je sa skrajnom dobroćudnosti i možda je to bila zapreka praktičnom uspjehu, kakav je svijet od njega očekivao. Iznosio je i fantastične planove, nazivali su ga pjesnikom i Muhamedom elektrotehnike, čarobnjakom, vizionarom, genijem-rasipnikom, sanjarom, neženjom-čudakom. Doživio je financijalne slomove, radio je sâm, bez velikih sredstava s kakvim je raspolagao Marconi, bez naučnih i tehničkih savjetnika i suradnika, kakve je Marconi našao u Kemptu, Franklinu i Roundu.

---

[10] O'Neill opisuje živo jedan prizor eksperimentiranja, kod kojeg je Tesla dobio 135 stopa duge vještačke munje. Pucanje se čulo 15 milja daleko.

[11] Kod svečanosti, koja je u New-Yorku bila priređena u čast Marconija, bili su prisutni mnogi američki stručnjaci, među njima i Pupin, ali nije bilo Tesle. Tesla je čestitao Marconiju, ali je kasnije (god. 1905.) u jednom časopisu upozorio, da se Marconi bez dopuštenja i autorizacije poslužio njegovom metodom. Bilo je to i prije toga mnogima poznato. Spomenut ćemo, da je senator Marconi, i ako je živio i radio u Engleskoj, bio član vrhovnog fašističkog vijeća Italije, dok kod našeg Tesle imamo skrajnje humano gledanje na nauku, tehniku, otkrića i novac. U monografiji G. Pession, Marconi (i grandi Italiani 15, 1941.), nije spomenuto Teslino ime.

U posljednja dva decenija donosile su američke novine i časopisi Tesline izjave o problemima nove fizike (atomistika, Einsteinova teorija) pa i o okultnim problemima. Trajni spomenici Teslina rada, višefazni sustav izmjeničnih struja, indukcijski motor i Teslin transformator, jesu djelo njegove mladosti. U starosti doživio je Tesla jedan težak slučaj. Padom kraj automobila, slomio si je rebra.[12]

S interesom pratio je Tesla prilike u svojoj staroj domovini i u tom pogledu zastupao opće — ljudsko, humano stajalište. Za svojeg dugog života u Americi zadržao je naš Tesla duboki osjećaj za narod, iz kojeg je potekao, i za svoj rodni kraj. S ponosom je isticao svoju srpsku narodnost i hrvatsku domovinu. U američkom društvu citirao je naše narodne pjesme i iznosio njihov sadržaj. U vrijeme rata bolno su ga se dojimale vijesti o nečuvenom klanju Srba i Hrvata u njegovoj staroj domovini, o zvjerstvima, koje su izvodili tuđinac i njegove sluge. Bio je uvjeren u konačni slom fašizma. Za skupštinu sovjetskih akademija od 12. X. 1941. sastavio je Tesla slijedeću poruku: ... jugoslavenski narod je uvijek bio i bit će protivan nacističkoj i fašističkoj ideologiji. To je bio uzrok spontane narodne revolucije, koja je izvršena u Beogradu 27. III., to je suština borbe i otpora okupatorskim vlastima cijelog jugoslavenskog naroda ... S divljenjem promatramo herojsku borbu na bojnom polju bratskog ruskog i ostalih naroda Sovjetske Unije, kao i visoke moralne pobude, kojima su nadahnuti naši div — junaci, lijući svoju krv ne samo za obranu svoje zemlje nego i za slobodu i civilizovani život svih zarobljenih naroda ...[13] Nažalost, Tesla nije doživio konac rata. Umro je u najskromnijim materijalnim okolnostima. — 10. I. 1943., dok je ležao na odru, održala se njemu u počast na radiostanici New-York svečana komemoracija. Načelnik La Guardia, poznati prijatelj Jugoslavije, pročitao je tekst, kojeg je sastavio američki književnik Louis Adamič, rodom Slovenac.

Pepeo Teslina tijela leži na jednom groblju u New-Yorku.

D. P.

Bibliografija

PUBLICATIONS DE L' INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE SERBE DES SCIENCES
Beograd I, 1947, XVI + 142

Godine 1932 počeo je u Beogradu da izlazi naučni časopis *Publications Mathématiques de l' Université de Belgrade;* izašlo je svega 7 tomova (6 i 7 u jednoj knjizi). Izbijanje rata, pad i okupacija Jugoslavije onemogućili su dalje izlaženje toga časopisa koji je bio stekao visoko ime u naučnom svijetu. Za vrijeme okupacije naučni rad beogradskih matematičara bio je prekinut, jer je Univerzitet bio zatvoren, a profesori, što u internaciji, što u zarobljeništvu, što u borbi. Kad je neprijatelj pri povlačenju iz Beograda, jeseni 1944, zapalio zgradu Filozofskog fakulteta potpuno je uništio, između ostalog, bogatu matematičku biblioteku fakulteta i skladište odštampanih tomova Publications mathématiques.

Po oslobođenju, inicijativom akademika A. Bilimovića, uz podršku drugih matematičara — akademika, profesora — organiziran je bio 1946 *Matematički institut Srpske akademije nauka.*

Savjet instituta sačinjavahu redovni i dopisni članovi akademije: pokojni B. Gavrilović, M. Milanković, A. Bilimović (predsjednik Instituta), V. V. Mišković, N. Saltikov, J. Karamata i R. Kašanin (sekretar Instituta). Vijeće instituta sačinjavahu članovi Savjeta i stalni naučni saradnici: I. Arnovljević, J. M. Hličiev, T. Pejović, M. Radojčić, M. Vrečko, V. Avakumović i T. Anđelić.

12 Marconi je jednim sličnim slučajem izgubio jedno oko.
13 Prema časopisu Radio — Beograd, II, br. 10, 1946.

»Jedna od prvih zadaća koje se prihvatilo predsjedništvo Instituta bijaše da se pokrene jedan matematički list. Zahvaljujući dobronamjernoj pomoći vlasti, osobito Ministarstva Prosvjete, ta je namjera ostvarena, pa je tako prvi broj Publications de l' Institut Mathématique mogao izaći« (str. VIII.).

Prvi tom lista sadrži: Predgovor, sadržaj svih sedam predratnih tomova *Publications mathématiques* i 14 naučnih radova, uglavnom članova vijeća Instituta te radova nekih inostranih matematičara što su ih ovi još prije rata bili poslali za VIII tom Publications mathématiques.

Članci su iz oblasti diferencijalnih jednadžbi (obične i parcijalne) zbirljivosti, teorije funkcija, teorije skupova, statistike, racionalne mehanike, nebeske mehanike i termodinamike.

Radujemo se pojavi toga internacionalnog naučnog časopisa (članci su napisani: jedan u engleskom, jedan na ruskom, ostali na francuskom jeziku) u našoj zemlji, jer smo svijesni, da će on dati znatno potstreka našoj nauci i njenim primjenama; osim toga, izdavanje jednog takvog, reprezentativnog, časopisa jedini je put kako da, međusobnom zamjenom, dođemo do sličnih časopisa u drugim zemljama.

L. J. Mordell

A CHAPTER IN THE THEORY OF NUMBERS

An Inaugural Lecture, C a m b r i d g e U n i v e r s i t y P r e s s 1947, 31 p; (1 s, 6 d.). Djelce daje nekoje rezultate o diofantskoj jednadžbi $y^2 = x^3 + k$, staroj već preko tri stoljeća: tako na pr., ako je $k = 6$ ili 7, jednadžba nema cjelobrojnih rješenja a kad je $k = 17$, ima ih baš 16, od kojih su dva na pr. $x = 5234$, $y = \pm 378661$. Ako je $k = 1$, ima jednadžba samo dva racionalna rješenja: $x = 2$, $y = \pm 3$.

Susrećemo se sa imenima: kao Bachet, L. Euler, V. A. Lebesgue, Siegel i t. d. Sam autor Mordell bavi se od 1912 gornjom jednadžbom pa postavlja problem da se nađe opći oblik za k, za koji gornja jednadžba nema racionalnih rješenja.

Harold Spencer Jones

THE ROYAL OBSERVATORY GREENWICH, LONDON

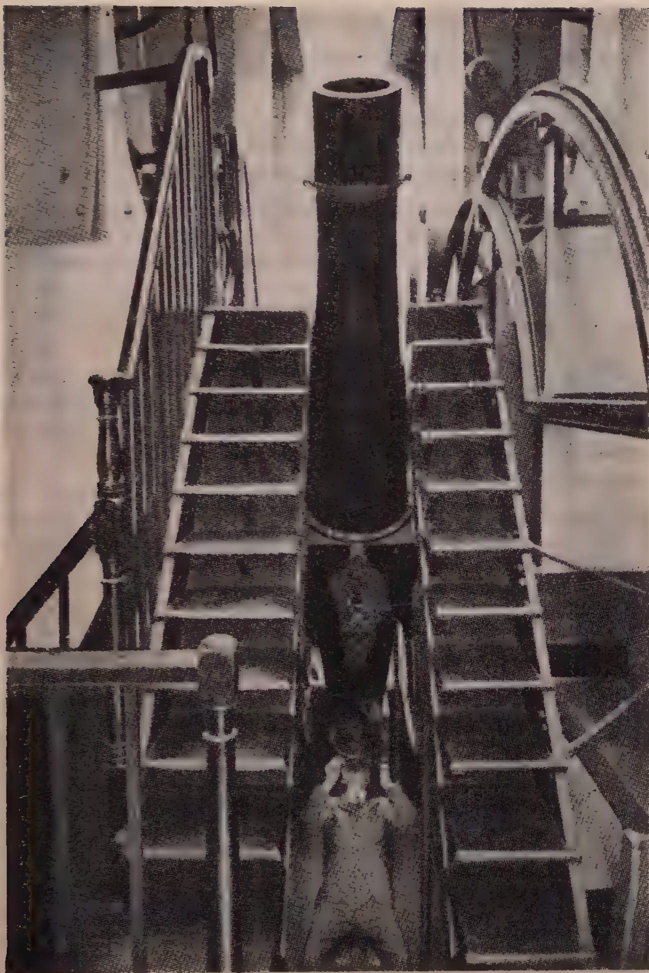
Longmans Green, 44 p, 11 ilustracija; 1 s 6 d. net. 1946, treće izdanje (prvo izdanje: 1943).

Ta knjižica, izašla u popularnoj zbirci S c i e n c e i n B r i t a i n, prikazuje u kratkim crtama kako je nastao i kako se razvijao *The Royal Greenwich Observatory.*

Da zadovolji potrebama dnevnog pomorskog života Engleske koja se u 17 stoljeću počela da razvija u veliku pomorsku silu, specijalno, da se pronađu zgodne metode za određivanje geografskih dužina, osnovan je 1675 observatorij u Greenwichu. Radovima svojih upravitelja (Flamsteed, Halley, Bradley, Maskelyne, Pond, Airy, Christie)[1], stekao je taj opservatorij toliki ugled, da je 1884, na svjetskom Kongresu stručnjaka, meridijan kroz Greenwich izabran za početni meridijan. Autor na ubjedljiv način prikazuje razvoj od prvobitnih, primitivnih, instrumenata Flamsteeda — koji su bili privatno vlasništvo ovoga — do zamršenih teodolita, kvarcovih ura i radioaparata. Kad svakodnevno čujemo radiosignale tačna vremena, ni ne slutimo od kolike je to praktične vrijednosti, a knjižica pokazuje kako je mukotrpan bio put kojim smo došli do te kulturne tekovine.

---

[1] Sam autor, Jones, je Astronomer Royal počam od 1933 g. i to po redu deseti. Njemu zahvaljujemo dosad najtačnija mjerenja udaljenosti Zemlje od Sunca.



Airy-ev pasažni instrument u Greenwichu;
meridijan kroz njegovo središte prihvaćen je 1884 kao početni meridijan.

S tim u vezi dodajemo, da bi bilo vanredno korisno i poučno promatrati razvoj opservatorija u Greenwichu s gledišta socijalno-ekonomskog i povući paralelu s razvojem opservatorija u Parizu koji je uslijed političkih prilika bio u vremenu od svojeg osnutka 1669 — dakle 6 godina prije no što je osnovana zvjezdarnica u Greenwichu — pa sve do 1793 kao neka »prćija« obitelji Cassini.

Djelo se završava obavještenjem da uslijed širenja Londona, opservatorij ne može više ostati tamo gdje jest: taj kraj udaljen od nekadašnjeg Londona nekoliko milja sad je i sam dio današnjeg Londona, što svakako smeta tačnim mjerenjima i promatranjima raznih zemaljskih i nebeskih pojava; pa je odlučeno da Herstmonceux Castle, sagrađen 1441, u Sussex-u — (Južna Engleska), postane novi dom za *Royal Greenwich Observatory.*

ZADACI

Rješavajte zadatke i šaljite rješenje na adresu: Redakcija Glasnika, Marulićev trg 19, Zagreb.

Nije dovoljno da pošaljete samo rezultate pojedinih zadataka; važniji je opis postupka, kojim ste zadatak riješili.

Šaljite nam razne zadatke s pripadnim rješenjem!

Pažnja! *Ne rješavajte više zadataka na jednom te istom komadu papira! Pišite samo na jednoj strani papira! Ako se u rješenjima služite i slikama, nacrtajte sličicu na posebnom komadu tvrđeg papira, i to po mogućnosti tušem!*

*Hitno šaljite rješenja zadataka označenih zvjezdicom *, jer ćemo ta rješenja objaviti već u drugom narednom broju Glasnika.*

69.* Tetiva AB kružnice sa središtem u S produži se preko B do P tako, da je BP jednako polumjeru. Pravac kroz P i S siječe kružnicu u T i po drugi put u V. Dokaži, da je luk AV tri put veći nego luk BT.

Na osnovu toga svojstva:

a) potrostruči zadan kružni luk BT;

b) pokušaj razdijeliti zadan kružni luk AV na tri jednaka dijela (u općem slučaju, problem b) nije moguće izvesti služeći se jedino šestarom i trokutima).

70.* Koliko rješenja ima jednadžba

$$\sqrt{px+q}+\sqrt{rx+s}=a$$

(Diskusija).

71.* Pauk i muha. Pauk progoni muhu po međašnim plohama kvadra, koji je dug 10, širok 4 i visok 4 jedinice, a počiva na plohi 10×4. U času, kad se pauk nalazio na plohi 4×4 u točki, koja leži 3 jedinice nad sredinom donjeg osnovnog brida, a muha na suprotnoj plohi u točki, koja leži 1 jedinicu nad sredinom donjeg osnovnog brida, progovori muha: »Ne ću se maknuti s mjesta, pauče, i predat ću ti se na milost i nemilost, ako dođeš do mene putem, koji je kraći od 14 jedinica«. Pauk je vrstan geometar, i on je taj put našao. Nađi ga ti!

72.* Koji kut mora činiti pravac sile s horizontalnim smjerom, da za pokretanje tijela po horizontalnoj ravnini bude potrebna što manja sila, ako je koeficijent trenja ε?

73.* Koliku energiju daje udarac strijele, koja se u vremenu od $5 \cdot 10^{-6}$ sek. izbije kroz otpor 10 oma, ako struja izbijanja iznosi 100.000 amp.?[1] Kolika cijena odgovara toj energiji, ako 1 kilovatsat stoji 5 Din?

74. Neka je n koji god prirodni broj; stavimo li

$$f(x) \equiv a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx,$$

odredi koeficijente $a_1, a_2, \ldots a_n$ tako da bude vrijedio identitet

$$f(x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, f(x-t)\, dt.$$

* Zvjezdicom označene zadatke mogu riješiti i učenici srednjih škola, odnosno studenti prvog i drugog semestra.

[1] v. na pr. »Priroda«, god. 1943, str. 90.

75. Na vanjskoj strani šuplje staklene kugle (kao što su na pr. ukrasne cvijetne kugle u vrtovima) zrcale se okolni predmeti i to tako, da u kugli nastaju njihove virtualne slike, a pri tom je cijeli prostor izvan kugle preslikan na jedan dio prostora u kugli. Ako je ploha kugle polupropusno zrcalo, to će i na unutarnjoj strani nastati zrcaljenje, pa će pri tom predmeti, koji se nalaze izvan kugle, imati i realnu sliku, ali u drugom dijelu prostora u kugli, na koji će na taj način prostor izvan kugle još jednom biti preslikan. Slično će i svaki predmet, koji se nalazi u kugli, imati po dvije slike. Neka se nađu: a) jednadžbe transformacije, ako je središte kugle ishodište Cartesijevog koordinatnog sustava; b) šta je slika pravca? Diskusija. (Neka se pri rješavanju zadatka uzme da relacije za zrcaljenje na sfernom zrcalu malog otvora točno vrijede i u ovom slučaju).

76. Zadana su 4 pravca u prostoru:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_i + b_i z \\ y &= c_i + d_i z \end{aligned}\right\} \; i = 1, 2, 3, 4.$$

Odredi jednadžbu pravca

$$\xi = \alpha + \beta \zeta$$
$$\eta = \gamma + \delta \zeta$$

koji siječe sva četiri zadana.

RJEŠENJA ZADATAKA 6, 10, 54*, 56*, 57*, 58*, 67*

6. Dva igrača A i B igraju igru »glava, pismo«; po dogovoru, pobjednik je onaj, koji uzastopce dobije n partija. Ako je A upravo dobio m partija, gdje je $m < n$, kolika je vjerojatnost, da će A biti pobjednik? (Dostavio s rješenjem Vl. Devidé; riješili St. Bilinski, Zagreb i B. Zelenko, Zagreb.)

1. Rješenje Bilinskoga:

Najprije ćemo pokazati, da je vjerojatnost da igra završi jednaka jedinici.

Da to pokažemo uzmimo najprije kn zamišljenih partija i rastavimo ih po redu u k skupinu po n partija, pa postavimo jedan drugi uvjet igre i to takav, da je pobjednik onaj igrač, koji prvi dobije redom svih n partija jedne skupine. Vjerojatnost, da igra završi baš sa i-tom skupinom partija jednaka je

$$v_i = \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^{i-1} \text{(složena vjerojatnost!)},$$

a onda je vjerojatnost da igra završi u tih $k\,n$ partija jednaka

$$V = \sum_{i=1}^{k} v_i = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^k. \tag{1}$$

(totalna vjerojatnost).

Vidimo dakle, da se vjerojatnost V može po volji približiti jedinici, samo ako se broj k uzme dovoljno velik.

Budući da je uvjet za završetak igre u danom zadatku svakako povoljniji (jer ne mora svih n dobivenih partija pasti u istu skupinu, a m partija je već dobiveno), to vjerojatnost, da će igra danog zadatka završiti, ne može biti manja od vjerojatnosti (1) za bilo koji broj k, t. j. ona mora biti jednak jedinici.

Vjerojatnost da će A biti pobjednik ovisit će sada svakako o brojevima n i m, pa ćemo je zato označiti sa

$$v = f(n, m). \tag{2}$$

Za funkciju (2) možemo unaprijed reći da mora biti

$$f(n, n) = 1, \tag{3}$$

jer ako je A dobio uzastopce već n partija, onda je dakako prema dogovoru i pobjednik. Isto tako za traženu funkciju (2) mora vrijediti relacija

$$f(n, 0) = \frac{1}{2}, \tag{4}$$

jer na početku igre je vjerojatnost pobjede za oba igrača jednaka.

Uzmimo sada, da je iza m partija, koje je uzastopce dobio A, odigrana još jedna partija. Vjerojatnost da ju je A dobio je $\frac{1}{2}$. a ista je tolika i vjerojatnost da je A tu partiju izgubio. U slučaju da je A dobio tu $(m + 1)$-*vu* partiju, vjerojatnost da će A biti pobjednik — po definiciji funkcije (2) — jednaka je $f(n, m + 1)$. Izgubi li A $(m + 1)$-*vu* partiju, to je time B dobio jednu partiju, pa je tada vjerojatnost da će B biti pobjednik jednaka $f(n, 1)$, a to znači, da je vjerojatnost da će A u tom slučaju pobijediti, jednaka $1 - f(n, 1)$. Iz toga svega slijedi, da vjerojatnost (2) možemo rastaviti u dva dijela i pisati ovu funkcionalnu jednadžbu:

$$f(n, m) = \frac{1}{2} f(n, m + 1) + \frac{1}{2} [1 - f(n, 1)]$$

ili

$$f(n, m + 1) = 2 f(n, m) + f(n, 1) - 1. \tag{5}$$

Stavljamo li u jednadžbu (5) za m redom $1, 2, 3, \ldots$ doći ćemo nepotpunom indukcijom do toga, da za te vrijednosti od m vrijedi relacija:

$$f(n, m) = (2^m - 1) f(n, 1) - 2^{m-1} + 1. \tag{6}$$

No tu relaciju možemo tada potvrditi i potpunom indukcijom, ako vrijednost za $f(n, m)$ iz (6) substituiramo u (5).

Stavimo li sada u relaciju (6) mjesto m broj n, to primjenom jednadžbe (3) dobivamo:

$$f(n, 1) = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}. \tag{7}$$

Ako napokon uvrstimo vrijednost za $f(n, 1)$ iz (7) u relaciju (6), to ćemo dobiti nakon sređivanja konačni izraz za traženu vrijednost (2):

$$v = f(n, m) = \frac{2^{n-1} + 2^{m-1} - 1}{2^n - 1}. \tag{8}$$

Vidimo sada, da relacija (8) zadovoljava uvjetu (3), ali ona zadovoljava i uvjetu (4), kojim se nismo poslužili u izvođenju relacije (8).

2. Rješenje Zelenka.

Neka je p_{n-m} vjerojatnost da A dobije igru poslije dobivenih $m > 0$ partija za redom, a p'_{n-r} vjerojatnost da A dobije igru poslije izgubljenih $r > 0$ partija za redom.

Igra je završena:

ili kad je A dobio n igara za redom, dakle $m = n$, $p_0 = 1$,
ili kad je A izgubio n igara za redom, dakle $r = n$, $p'_0 = 0$.

Poslije dobivenih m partija može A dobiti igru: ili da u slijedećoj partiji dobije, pa je onda vjerojatnost dobitka igre p_{n-m-1}, ili da u slijedećoj partiji izgubi, pa je onda vjerojatnost dobitka igre p'_{n-1}. Vjerojatnost da u slijedećoj partiji dobije odnosno izgubi jest $p = \frac{1}{2}$, pa je

$$p_{n-m} = \frac{1}{2} p_{n-m-1} + \frac{1}{2} p'_{n-1}.$$

Za $m = n - 1$ je

$$p_1 = \frac{1}{2} p_0 + \frac{1}{2} p'_{n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p'_{n-1};$$

za $m = n - 2$ je

$$p_2 = \frac{1}{2} p_1 + \frac{1}{2} p'_{n-1} = \frac{1}{2^2} + p'_{n-1} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} \right)$$

Općenito je dakle

$$p_{n-m} = \frac{1}{2^{n-m}} + p'_{n-1} \sum_{i=1}^{n-m} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n-m}} + p'_{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-m}} \right). \qquad (1)$$

Poslije izgubljenih r partija može A dobiti igru ili da u slijedećoj partiji dobije, pa je onda vjerojatnost dobitka igre p_{n-1}, ili da u slijedećoj partiji izgubi, pa je onda vjerojatnost dobitka igre p'_{n-r-1}; prema tome je

$$p'_{n-r} = \frac{1}{2} p_{n-1} + \frac{1}{2} p'_{n-r-1}.$$

Za $r = n - 1$ je

$$p'_1 = \frac{1}{2} p'_0 + \frac{1}{2} p_{n-1} = \frac{1}{2} p_{n-1}.$$

Za $r = n - 2$ je

$$p'_2 = \frac{1}{2} p'_1 + \frac{1}{2} p_{n-1} = p_{n-1} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} \right).$$

Općenito je dakle

$$p'_{n-r} = p_{n-1} \sum_{i=1}^{n-r} \frac{1}{2^i} = p_{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-r}} \right).$$

Za $r = 1$ dobivamo

$$p'_{n-1} = p_{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right).$$

Uvrštavanjem u (1) dobivamo

$$p_{n-m} = \frac{1}{2^{n-m}} + p_{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) \left(1 - \frac{1}{2^{n-m}} \right) \qquad (2)$$

Za $m = 1$ dobivamo

$$p_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} + p_{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)^2; \text{ odatle } p_{n-1} = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}.$$

što uvršteno u (2) daje traženo rješenje.

$$p_{n-m} = \frac{2^{m-1} + 2^{n-1} - 1}{2^n - 1}, \quad m > 0 \qquad (3)$$

Ako je A baš izgubio r partija za redom, vjerojatnost dobitka igre je

$$p'_{n-r} = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-r}} \right) = \frac{2^{n-1} - 2^{r-1}}{2^n - 1}, \quad r > 0 \qquad (4)$$

Vjerojatnost da igra ne završi je

$$p''_m = 1 - p_{n-m} - p'_{n-m} = 1 - \frac{2^{m-1} + 2^{n-1} - 1}{2^n - 1} - \frac{2^{n-1} - 2^{m-1}}{2^n - 1} = 0, \; m > 0,$$

pa je i prije početka igre $p''_0 = 0$.

Vjerojatnost da A dobije igru prije početka igre jednaka je vjerojatnosti da je izgubi, pa je

$$p_n = p'_n = \frac{1}{2},$$

pa jednadžbe (3), (4) vrijede i za $m = 0$, odnosno $r = 0$.

3. *Devidé-ov dokaz da će se partija završiti.*

Ako je A upravo dobio m-tu ($m \leq n$) partiju uzastopce (bilo da su to prvih m odigranih partija, bilo da je partiju neposredno prije igre od tih m dobio B) označit ćemo:

a) vjerojatnost da A dobije igru sa a_m

b) vjerojatnost da B dobije igru sa b_m

c) vjerojatnost da je ne dobije nitko, naime vjerojatnost, da se igra protegne u beskonačnost, sa v_m. Odgovarajuće vjerojatnosti prije početka same igre neka su a_0, b_0, v_0.

Kako se slučajevi *a*), *b*), *c*) međusobno isključuju, vrijedit će za $k = 0, 1, \ldots, n$ jednadžbe

(1) $$a_k + b_k + v_k = 1;$$

u prvoj od tih jednadžbi očito je

$$a_0 = b_0, \text{ u posljednjoj } a_n = 1,\ b_n = 0,\ v_n = 0.$$

Mogućnost da se igra ne dovrši mogla bi se ostvariti u dva jednako vjerojatna slučaja: 1. ako prvu partiju dobije A, i 2. ako prvu partiju dobije B. Prema tome je

$$v_0 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_1 \quad \text{t. j.} \quad v_0 = v_1$$

jer je vjerojatnost da igra ne završi, ako prvu partiju dobije B, očito ista kao i vjerojatnost da igra ne završi, ako prvu partiju dobije A. Analogno će biti

$$v_1 = \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{2} v_1 \quad \text{t. j.} \quad v_2 = v_1;$$

slično nalazimo

$$v_2 = v_3 = v_4 = \ldots = v_{n-1}.$$

Kako nadalje mora biti

$$v_{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} v_1$$

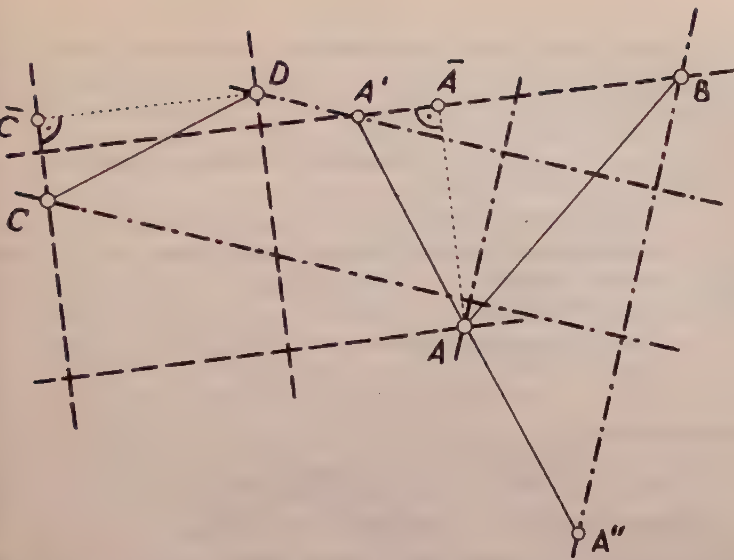
izlazi da su svi v_k ($k = 0, 1, \ldots, n$) jednaki nuli.

10. Kroz četiri zadane točke u ravnini položi kvadrat tako, da na svakoj stranici kvadrata ili na njegovu produženju leži po jedna točka. Koliko ima rješenja? (Dostavio D. Blanuša; riješili: Fr. Neděla, Zagreb, B. Grünbaum, Osijek, V. Devidé, Zagreb, B. Zelenko, Zagreb.)

Rješenje V. Devidéa:

Označimo točke sa A, B, C, D i spojimo točku A na pr. s točkom B (a C sa D). Iz točke A nanesimo u smjeru okomitom na CD u oba smisla dužinu CD; time dolazimo do točaka A' i A''. Spojimo li B sa A', dobivamo smjer za jedno rješenje (na slici crtkano), a smjer BA'' daje drugo rješenje (na slici crtkano-točkano).

Dokaz: Trokuti $A'A\overline{A}$ i $CD\overline{C}$ slični su, jer su im kutovi jednaki (homologne stranice međusobno su okomite); kako je $AA' = CD$, to su oni i sukladni, pa je $\overline{C}D = \overline{A}A$. Lako uviđamo, da bismo došli do istog rezultata, da smo dužinu nanosili iz točke B ili da smo odgovara-



ući postupak proveli iz točke C ili D. Kombinacija A-B, C-D daje dakle pćenito dva rješenja. Isto tako daju po dva rješenja kombinacije A-C, -D i A-D, B-C. Općenito će dakle zadatak imati 6 različitih rješenja. rovedemo li postupak unutrag, t. j. pretpostavimo li neko rješenje, lako alazimo, da iz njega slijedi jedna od 6 gornjih konstrukcija, pa osim h 6 ne može biti drugih rješenja.

U posebnom slučaju kad je $AB \perp CD$, a $AB \neq CD$, ne će kombiacija A-B, C-D dati nijedno rješenje (ako granični slučaj »kvadrata sa tranicom nula« ne smatramo rješenjem), jer će točke A' i A'' pasti u ravac AB; ako je $AB \perp CD$ i $AB = CD$, past će jedna od točaka A' '' u točku B, pa će svaki pravac kroz B (osim u smjeru AB) dati jedno ješenje. Sada kombinacija A-B, C-D daje beskonačno mnogo rješenja.

Zelenkovo rješenje:

Neka su zadane točke $A\,(x_0, y_0)$, $B\,(x_1, y_1)$, $C\,(x_2, y_2)$, $D\,(x_3, y_3)$ u ravokutnom koordinatnom sustavu. Da pravci $y - y_0 = a\,(x - x_0)$; $- y_1 = b\,(x - x_1)$ budu susjedne stranice traženog kvadrata, mora biti $= -\dfrac{1}{a}$, jer su stranice okomite; dovoljno je da bude još

$$\frac{y_2 - a\,x_2 - y_0 + a\,x_0}{\sqrt{1+a^2}} = \pm \frac{a\,y_3 + x_3 - a\,y_1 - x_1}{\sqrt{1+a^2}}$$

r su apsolutne vrijednosti udaljenosti paralelnih stranica jednake. Doivamo

$$a_1 = \frac{x_3 - x_1 + y_0 - y_2}{x_0 - x_2 + y_1 - y_3}; \qquad a_2 = \frac{-x_3 + x_1 + y_0 - y_2}{x_0 - x_2 - y_1 + y_3}.$$

ilo koje dvije od četiri točke mogu ležati na suprotnim stranicama vadrata, te pri svakom od ta tri slučaja postoje dva rješenje. Općenito akle ima šest rješenja.

Rješenja ima beskonačno mnogo, ako je

$$\pm x_3 \mp x_1 + y_0 - y_2 = 0; \qquad x_0 - x_2 \pm y_1 \mp y_3 = 0.$$

Kako je u tom slučaju

$$\pm x_3 \mp x_1 = y_2 - y_0; \qquad x_0 - x_2 = \pm y_3 \mp y_1; \qquad \frac{x_0 - x_2}{y_0 - y_2} = - \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1},$$

idimo, da su spojnice točaka A, B, C, D međusobno okomite i jednake.

F. Neděla uzima točku A kao ishodište koordinatnog sustava i konstatira, da se kroz točke A, B, C, D može općenito položiti C pravokutnika, kojima su stranice paralelne s koordinatnim osima. Te pravokutnike dijeli u dvije skupine po 3, prema tome, da li je os x ili os y jedna od stranica pravokutnika, Zatim pita, za koji kut φ treba zakrenuti koordinatni sustav, da neki od tih pravokutnika postane kvadrat. Nove koordinate dane su transformacijom

$$x' = x \cos\varphi + y \sin\varphi; \qquad y' = -x \sin\varphi + y \cos\varphi.$$

Treba li pravokutnik 1. skupine, kojemu su stranice $|y_1|$ i $|x_2 - x_3|$, prijeći u kvadrat, mora biti $|y_1'| = |x_2' - x_3'|$, t. j. ili $y_1' = x_2' - x_3'$ ili $-y_1' = x_2' - x_3'$, što daje

$$-x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi = x_2 \cos\varphi + y_2 \sin\varphi - x_3 \cos\varphi - y_3 \sin\varphi$$

$$tg\,\varphi = \frac{y_1 - (x_2 - x_3)}{x_1 + (y_2 - y_3)} = tg\,\varphi_{1a}$$

odnosno analogno

$$tg\,\varphi = \frac{y_1 + (x_2 - x_3)}{x_1 - (y_2 - y_3)} = tg\,\varphi_{1b}$$

Cikličkom zamjenom ideksa dobiju se rješenja

$$tg\,\varphi_{2a},\ tg\,\varphi_{2b},\ tg\,\varphi_{3a},\ tg\,\varphi_{3b}$$

za ostale pravokutnike 1. skupine. Iz tih formula autor izvodi istu geometrijsku konstrukciju kao Devidé. Zatim pokazuje analitički, da su rješenja 2. skupine identična s rješenjima 1 .skupine, tako da općenito ima 6 rješenja.

Kako je funkcija arctg definirana za sve vrijednosti od $-\infty$ do $+\infty$, zadatak ima uvijek rješenja.

Autor dalje analitički sustavno istražuje dvostruka i neodređena rješenja, pa na temelju opširne diskusije dobiva ove rezultate:

Zadatak ima

I. $(\infty + 4)$ rješenja, gdje je u skupu od ∞ rješenja jedno dvostruko (reducira se na točku), ako je spojnica dviju točaka jednaka spojnici drugih dviju točaka i okomita na njoj, dok druge kombinacije spojnica nisu okomite.

II. $(\infty + 2)$ rješenja, od kojih su ova 2 i još jedno od njih ∞ dvostruka, ako ima jedan par okomitih i jednakih spojnica i još dva para okomitih spojnica, t. j. jedna je točka sjecište visina trokuta, kojemu su ostale 3 točke vrhovi, a baza je jednaka odsječku na pripadnoj visini od sjecišta visina do vrha.

III. $(1 + 4)$ rješenja, gdje je ono jedno dvostruko, ako imamo samo jedan par okomitih nejednakih spojnica.

IV. 3 rješenja (dvostruka), ako imamo 3 para nejednakih okomitih spojnica, t. j. svaka je točka sjecište visina trokuta, kojemu su vrhovi ostale tri točke.

V. 6 rješenja, ako nema nijednog para okomitih spojnica.

Autor konačno istražuje, kada se pojavljuju jednaka rješenja (t. j. kvadrati jednake veličine) i ustanovljuje:

Ako su točke vrhovi romboida ili pravokutnika, ima 2 para jednakih rješenja i 2 različita.

Ako su točke vrhovi romba, ima zbog simetrije 4 jednaka rješenja i jedno dvostruko (koje se reducira na točku).

Ako su točke vrhovi kvadrata, ima 4 jednaka rješenja i ∞ rješenja.

Autor ističe, da nije istražio sve mogućnosti, napose uvjete za 3, 4, 5, 6 jednakih rješenja, ukoliko te mogućnosti postoje. Za sve istražene mogućnosti F. Neděla dao je i slike, koje ovdje ne donosimo, nego preporučamo čitaocu, da ih sam konstruira.

G. Grünbaum proveo je rješenje na sličan način kao Neděla i dolazi o analogne formule za $tg\,\varphi$, do ispravnog broja od 6 rješenja za opći lučaj te postavlja jednadžbe za pravce, koji tvore stranice kvadrata. Nije izveo geometrijsku konstrukciju i nije diskutirao specijalne slučajeve.

Spominjemo još jednu geometrijsku konstrukciju (koja nam nije riposlana). Znamo, da je obodni kut nad polukružnicom jednak 90^0, isto tako obodni kut nad četvrtkružnicom jednak 45^0. Uzmemo li, da u točke A, B na susjednim stranicama kvadrata, bit će vrh kvadrata, u kojemu se te stranice sijeku, na jednoj od polukružnica iznad $A\,B$ kao promjera. Dijagonala kroz taj vrh mora onda prolaziti polovištem druge polukružnice, jer su time kutovi između dijagonale i stranica postali obodni kutovi iznad četvrtkružnica. Time je određena jedna točka dijagonale. Analogni postupak s točkama $C\,D$ daje drugu točku, tako da je određena dijagonala (kao pravac), a time i smjerovi stranica. Ova konstrukcija nije tako jednostavna kao ona, koju su dali Devidé i Neděla, ali je ideja zanimljiva, pa smo je zato naveli.

54.* Grijanje vode u epruveti od temperature t^0 do vrelišta (100^0) traje a sek. Za b daljih sekunda neka se sva voda ispari. Iz ovih podataka neka se odredi toplina isparivanja za vodu. (Dostavio D. Pejnović.) Učenica Nevenka Došek, Zagreb, poslala je ovo rješenje:

»Za grijanje vode do 100^0 potrošeno je $(100 - t)\; m$ cal (ako je m masa vode izražena u gramima). Količina topline je upravno razmjerna sa trajanjem grijanja, pa ako je x toplina isparivanja vrijedi razmjer

$$(100 - t)\, m : a = x\, m : b$$
$$x = \frac{b}{a}\,(100 - t)\;\frac{cal}{g}$$

O p a s k a. Kod ove vrlo brze metode otpada svako vaganje. Zapornom urom određuju se vremena a, b.

56.* Za svaki trokut $A\,B\,C$ važi

$$ctg\,\alpha + ctg\,\beta + ctg\,\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\,P}.$$

(Zadatak dostavio Đ. Kurepa; ispravno riješili: Zdenka Blašković, Marija Loušin, J. Blazina, maturantica Nevenka Došek na dva načina, D. Cvelić, svi iz Zagreba, te učenik D. Skoko iz Duge Rese.)

Zd. Blašković i N. Došek dolaze do rješenja pomoću svojstava trigonometrijskih funkcija i trigonometrijskih poučaka trokuta, specijalno pomoću poučka o kosinusima. Tako Doškova služeći se formulama:

$$cotg\,\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha},\quad sin\,\alpha = \frac{2\,P}{b\,c},\quad cos\,\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

brzo prevodi izraz $\qquad ctg\,\alpha + ctg\,\beta + ctg\,\gamma$

na traženi oblik $\qquad \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4\,P}.$

Blašković uvodi P pomoću Heronove formule.

M. Loušin, J. Blazina i D. Skoko ne služe se trigonometrijskim formulama, nego promatraju odreske na koje visina trokuta dijeli stranicu trokuta P. Tako dolaze do formula

$$a = v_a\,(ctg\,\beta + ctg\,\gamma),$$

što kombinirano sa

$$2\,P = a\,v_a \quad \text{daje} \quad ctg\,\beta + ctg\,\gamma = \frac{a^2}{2\,P};$$

cikličkom smjenom slova a, b, c, i α, β, γ dolazi se do još dviju sličnih relacija. Zbrajanjem svih triju tako dobivenih jednakosti, dolazi se do tražene jednakosti u zadatku.

D. Cvelić uzima u pomoć kružnicu opisanu oko $\Delta\, A\,B\,C$ pa promatra tetivni četverokut $A\,B\,C\,D$, gdje je D dijametralno suprotna točka vrha A. Kako je

$$ctg\,\alpha = \frac{BD}{a},\quad ctg\,\beta = \frac{AD}{b},\quad \text{dakle}\quad ctg\,\alpha + ctg\,\beta =$$

$$= \frac{b \cdot BD + a \cdot AD}{a\,b} = (\text{Ptolemejev poučak!}) = \frac{2\,r\,c}{a\,b}.$$

Još druge dvije slične relacije pribrojene prethodnoj daje na osnovu planimetrijske formule

$$r = \frac{a\,b\,c}{4\,P}$$

traženu jednadžbu.

Preporučamo čitaocu da još jednom uoči na koji način pojedini od rješavalaca uvodi P u traženu formulu.

57.* U koordinatnom sistemu u ravnini zadan je proizvoljan pravac p; ako je $(\xi,\ \eta)$ proizvoljna tačka pravca p, a a i b dva proizvoljna broja, dokaži da spojnice tačaka $(a,\ \xi)$, $(b,\ \eta)$ prolaze jednom te istom tačkom zavisnom jedino o pravcu p, a ne o pojedinoj njegovoj tački $(\xi,\ \eta)$. (Dostavio Đ. Kurepa; ispravno rješili: M. Živković, Vršac; Marija Loušin, J. Blazina, D. Cvelić, A. Grossmann, svi iz Zagreba.)

Marija Loušin i J. Blazina rješavaju zadaću tako da na zadanom pravcu $y = k\,x + l$ promatraju dvije proizvoljne tačke $(\xi,\ \eta)$, $(\xi_1,\ \eta_1)$ i traže sjecište spojnica tačaka $(a, \xi), (b, \eta)$ odnosno $(a, \xi_1), (b, \eta_1)$. Treba dakle riješiti po x i y sistem jednadžbi

$$y - \xi = \frac{\eta - \xi}{b - a}\,(x - a)$$

$$y - \xi_1 = \frac{\eta_1 - \xi_1}{b - a}\,(x - a)$$

kojima još treba dodati jednakosti

$$\eta = k\,\xi + l,\quad \eta_1 = k\,\xi_1 + l.$$

Tako se dolazi do tačke s koordinatama

$$x = \frac{a\,k - b}{k - 1},\quad y = -\frac{l}{k - 1}$$

koje očito ne zavise o ξ, η ili ξ_1, η_1.

Dajemo u cjelosti rješenje M. Živkovića te rješenje D. Cvelića zbog interesantnih dosjetki, koje ćemo istaknuti kurzivom.

M. Živković:

Ako je $y = k\,x + s$ jednačina pravca p, onda je zadovoljena jednačina

$$\eta = k\,\xi + s \tag{1}$$

Neka je $(m,\ n)$ pomoćna tačka na spojnici tačaka $(a,\ \xi)$ i $(b,\ \eta)$. Jednačina ove spojnice je onda

$$y - n = \frac{\xi - n}{a - m}\,(x - m) \tag{2}$$

ili

$$y - n = \frac{\eta - n}{b - m}\,(x - m) \tag{3}$$

Ako se iz ove tri jednačine eliminišu ξ i η dolazi se do jednačine spojnica u novom obliku

$$y - n = \frac{\dfrac{1}{1 - k} - n}{\dfrac{b - a\,k}{1 - k} - m}\,(x - m)$$

Iz ove se jednačine vidi da spojnice prolaze kroz tačku

$$\frac{b-ak}{1-k}, \quad \frac{1}{1-k}$$

čije koordinate, pored datih brojeva a i b, zavise jedino od elemenata k i s pravca p.

D. Cvelić:

Jednadžba spojnice je:

$$y-\eta=\frac{\eta-\xi}{b-a}(x-b).$$

Uzimajući u obzir da je $\eta=k\xi+l$, dobije se:

$$y-(k\xi+l)=\frac{k\xi+l-\xi}{b-a}(x-b)$$

a svođenje na implicitni oblik daje:

$$(b-a)y+x[\xi(1-k)-l]-b[\xi(1-k)-l]-(b-a)(k\xi+l)=0.$$

Kad se iz članova izvuče zajednički faktor ξ prednja jednadžba može se pisati:

$$(b-a)y-xl+al+\xi[x(1-k)-b+ak]=0$$

a to je jednadžba pramena pravaca, gdje je ξ parametar. Sve spojnice prolaze, dakle, jednom točkom. Koordinate te točke jesu korjeni jednadžbi:

$$(b-a)y-xl+al=0$$

$$x(1-k)-b+ak=0, \text{ t. j.}$$

$$S\left(\frac{ak-b}{k-1};\ \frac{l}{k-1}\right).$$

58.* U dekadskom brojnom sistemu brojevi n i n^9 imaju istu cifru jedinica. (Dostavio Đ. Kurepa. Ispravno riješili: M. Živković, Vršac, Zdenka Blašković, Zagreb i J. Blazina, Zagreb.)

M. Živković:

Da bi se proverila tvrdnja izneta u zadatku, *treba ispitati razliku brojeva n^9 i n* tj. n^9-n, koja se može prikazati kao produkt svojih činilaca tj.

$$n^9-n=n(n+1)(n-1)(n^2+1)(n^4+1).$$

Lako se uviđa da je ovaj produkt deljiv sa 10, a to znači da se razlika n^9-n svršava nulom, ma sa kojom se cifrom završavao broj n.

J. Blazina:

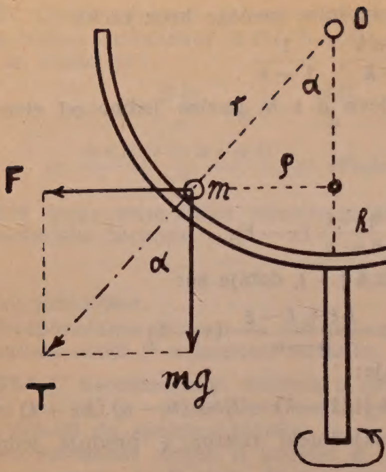
Budući da *znamenka, kojom svršava bilo koja potencija broja n, zavisi jedino o znamenki jedinica,* slijedi, ako

n svršava	sa	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	(I),
onda n^3	»	» 0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	(II),
a $n^9=(n^3)^3$	»	» 0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	(III).

Iz (III) = (I) slijedi tvrdnja zadatka.

67.* U horizontalno namještenoj polukugli s polumjerom r, koja rotira oko svojeg vertikalnog polumjera, nalazi se kuglica s masom m. Neka se izračuna visina h, do koje će se djelovanjem centrifugalne sile kuglica dići, ako je zadano trajanje t jednog okreta polukugle. Koja relacija mora postojati među veličinama t i r, da se kuglica počne dizati? (Dostavio D. Pejnović, Zagreb.) Dajemo doslovce rješenje, što ga je poslala učenica Nevenka Došek iz Zagreba.

Zadatak je riješio i D. Cvelić, Zagreb.



Sl. 1. U polukugli lebdeća kuglica.

»Kuglica mase m dizat će se do one visine h, kod koje će rezultanta T centrifugalne sile F i težine kuglice $m\,g$ biti okomita na površinu kugle koja rotira. U tom položaju je omjer između centrifugalne sile i težine kuglice koja se diže jednak tangensu kuta α, što ga čini os rotacije sa spojnicom središta polukugle i male kuglice. Prema tome je

$$tg\,\alpha = \frac{F}{m\,g} = \frac{4\,\pi^2\,\varrho\,m}{t^2\,m\,g}$$

Jer je $\varrho = r\,sin\,\alpha$, izlazi da je

$$cos\,\alpha = \frac{g\,t^2}{4\,\pi^2\,r}\,.$$

Kako je $h = r - r\,cos\,\alpha$, bit će konačno

$$h = r - \frac{g\,t^2}{4\,\pi^2}\,.$$

U tom slučaju zanemareno je trenje i polumjer male kuglice. Da se kuglica počne dizati, mora biti ispunjen uvjet $h > 0$, t. j.

$$\frac{g\,t^2}{4\,r\,\pi^2} < 1, \quad \text{odnosno} \quad t < 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}\,.$$

U idealnom slučaju, kad bi se središte male kuglice nalazilo točno na osi rotacije, kuglica se uopće ne bi počela dizati.«

Uslov da se kuglica diže može se izreći i tako da vrijeme t mora biti kraće od trajanja njihanja za njihalo dužine r. Kod vrlo brze rotacije $(t \doteq 0)$ izlazi $h \doteq r$.

U izrazu za h ne dolazi masa kuglice, što nam kazuje, da će se kuglice različnih težina dići istodobno do jednakih visina.

O p a s k a. Jednostavan eksperiment s »kuglicom, koja lebdi« (po Augustu) izvodi se s centrifugalnim strojem, a opisan je neispravno u nekim starijim fizikalnim djelima. Na pr. u knjizi Frick—Lehman, Physikalische Technik I, 512 (1898) stoji, da će se kuglica tim više dići, čim je lakša.

REDAKCIJA JE PRIMILA OVE PUBLIKACIJE:

6. Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences, Tome I, Belgrade, 1947. p. 16+158.

7. Josip Goldberg, Fizika za više razrede gimnazije — Nauka o toplini i molekularna fizika, za VII. razred. Zagreb, 1947. p. 1—147, Din. 26.

8. Sir Harold Spencer Jones, The Royal Observatory Greenwich, London, New-York, Toronto. Str. 44, 1 s. 6 d. net.

9. L. J. Mordell, A Chapter in the theory of Numbers, Cambridge, 1947. p. 31, 1 s. 6 d. net.

10. F. E. Relton, Applied Bessel Functions, — Blackie & son Limited, London, p. 8+199; 17 s. 6 d. net.

11. E. G. Richardson, Sound — A physical text-book, — London, p. 8+352.

12. D. J. Finney, Probit Analysis, A statistical Treatment of the Sigmoid response curve, — Cambridge, 1947. — p. 14+270.

13. J. N. Williams, Steam generation, — Evans — Montaque House, Russel Square, London, p. 372; 25 s. net.

14. R. R. Macintosh and W. W. Mushin, Physics for the Anaesthetist, — Blackwell — Scientific Publications — Oxford 1946, p. 8+243; 30 s. net.

15. Lah Ivo, 4%-tne tablice za račun matematičkih rezervi Državnog zavoda za socijalno osiguranje, Zagreb, 1947, p. 48+3 tabele.